Serie 2: Relationen, Abbildungen, Mächtigkeit, Gruppen

1. Auf $\mathbb{Z}$ definieren wir eine Relation $\equiv$ durch

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \equiv y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade})$$

a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation definiert. Bestimmen Sie die Menge der Restklassen.

b) Ersetzen Sie in der Definition von $\equiv$ das Wort "gerade" durch "ungerade". Definiert diese neue Version von $\equiv$ auch eine Äquivalenzrelation? Welche Eigenschaften einer Äquivalenzrelation werden erfüllt, welche nicht?

c) Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$ sei $\sim_n$ die Relation

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \sim_n y :\Leftrightarrow n \text{ teilt } x - y)$$

Wenn $x \sim_n y$, dann sagen wir auch x und y sind äquivalent modulo n und schreiben $x \equiv y \mod n$. Zeigen Sie, dass $\sim_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

d) Bestimmen Sie die Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/\sim_n$.

Bemerkung: Die Menge $\mathbb{Z}/\sim_n$ wird häufig auch $\mathbb{Z}_n$ oder ${}^{\mathbb{Z}}/_{(n)}$ geschrieben und ist – wie wir noch besprechen werden – ein Ring, nämlich der Restklassenring $\mod n$.

2. Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe, $a, b, c \in G$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $b = c \Leftrightarrow a \circ b = a \circ c$.

b) Das inverse Element $a^{-1} \in G$ mit der Eigenschaft $a^{-1} \circ a = e$ ist eindeutig.

c) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

3. Wir wollen zeigen, dass die Notation $x_1 * \cdots * x_n$ für $x_1, \ldots, x_n$ in einer Menge X mit einer assoziativen Verknüpfung $*$ unter gewissen Bedingungen wohldefiniert ist. Sei $(X, *)$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung, d.h. $* : X \times X \to X$ ist eine Abbildung, so dass

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad \forall x, y, z \in X$$

Bitte wenden!

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass es genau eine Möglichkeit gibt, für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Produkt $[x_1, \ldots, x_n] \in X$ von n Elementen in X zu definieren, so dass folgende gelten:

1. $\forall x \in X : [x] = x$
2. $\forall x_1, x_2 \in X : [x_1, x_2] = x_1 * x_2$
3. $\forall 1 \leq i < n \forall x_1, \ldots, x_n \in X : [x_1, \ldots, x_n] = [x_1, \ldots, x_i] * [x_{i+1}, \ldots, x_n]$

Hinweis: Gegeben eine Definition des Produktes von $n-1$ Elementen, definieren Sie

$$[x_1, \ldots, x_n] := [x_1, \ldots, x_{n-1}] * [x_n]$$

und überprüfen Sie, dass dies das einzig zulässige Produkt von n Elementen ist.

4. Gegeben eine Gruppe $(G, \circ, e)$ mit endlich vielen Elementen $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ ist die Gruppentafel gegeben durch

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & \cdots & g_j & \cdots \\ \hline \vdots & & \vdots & \\ g_i & \cdots & g_i \circ g_j & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Sei zum Beispiel $(G, \circ, e)$ eine Gruppe mit zwei verschiedenen Elementen $G = \{e, a\}$, dann impliziert die Kürzungsregel, dass $a \circ a = e$ und also ist die Gruppentafel notwendigerweise gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} \circ & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array}$$

Insbesondere existiert bis auf Umbenennung der Elemente genau eine Gruppe mit zwei Elementen.

a) Verwenden Sie die Gruppentafel, um zu zeigen, dass es, bis auf Umbenennung der Elemente, genau eine Gruppe mit drei Elementen gibt.

b) Verwenden Sie die Gruppentafel, um bis auf Umbenennung alle (zwei) Gruppen mit vier Elementen zu bestimmen.

c) Eine Gruppe $(G, \circ, e)$ heisst abelsch genau dann, wenn

$$\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$$

Geben Sie eine Charakterisierung endlicher, abelscher Gruppen unter Verwendung der Gruppentafel.

Siehe nächstes Blatt!

d) Sei D_4 die Gruppe erzeugt durch Komposition von Rotationen um den Mittelpunkt sowie Spiegelungen entlang der Symmetrieachsen eines Quadrats, die das Quadrat auf sich selber abbilden (vgl. Bild 1). Zeigen Sie, dass zwei Elemente $r, s \in D_4$ existieren, so dass sich jedes Element in D_4 als Komposition von s mit einer Potenz von r schreiben lässt.

e) Zeigen Sie, dass D_4 nicht-abelsch ist.

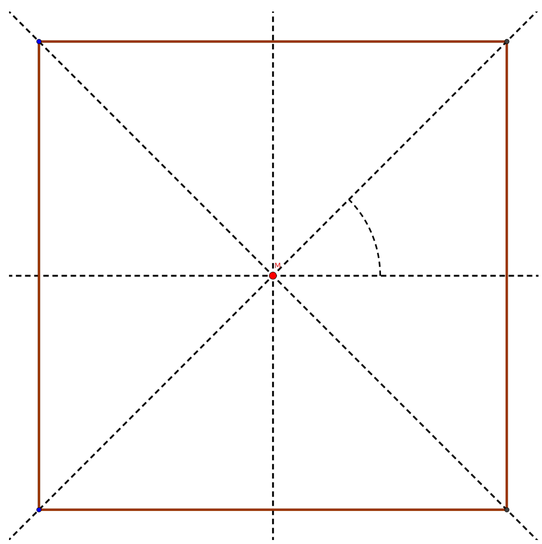

Abbildung 1: Ein Quadrat mit Mittelpunkt M und seinen Symmetrieachsen.

5. Online-Abgabe

Bitte wenden!

1. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(e) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$

(f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

2. Welche der folgenden Aussagen über die Mächtigkeiten von Mengen sind richtig?

(a) $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden Zahlen sind gleichmächtig.

(b) $\mathbb{N}$ und die Menge der Primzahlen sind gleichmächtig.

(c) $\{0, 1\}^5$ und $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ sind gleichmächtig.

(d) $\{0, 1\}^2$ und $\{a, b\}$ sind gleichmächtig.

(e) $\{0, 1\}^3$ und $\{1, 2, \ldots, 8\}$ sind gleichmächtig.

(f) Sei M eine endliche Menge. Dann sind $\mathbb{P}M$ und $\{0, 1\}^{|M|}$ gleichmächtig.

Siehe nächstes Blatt!

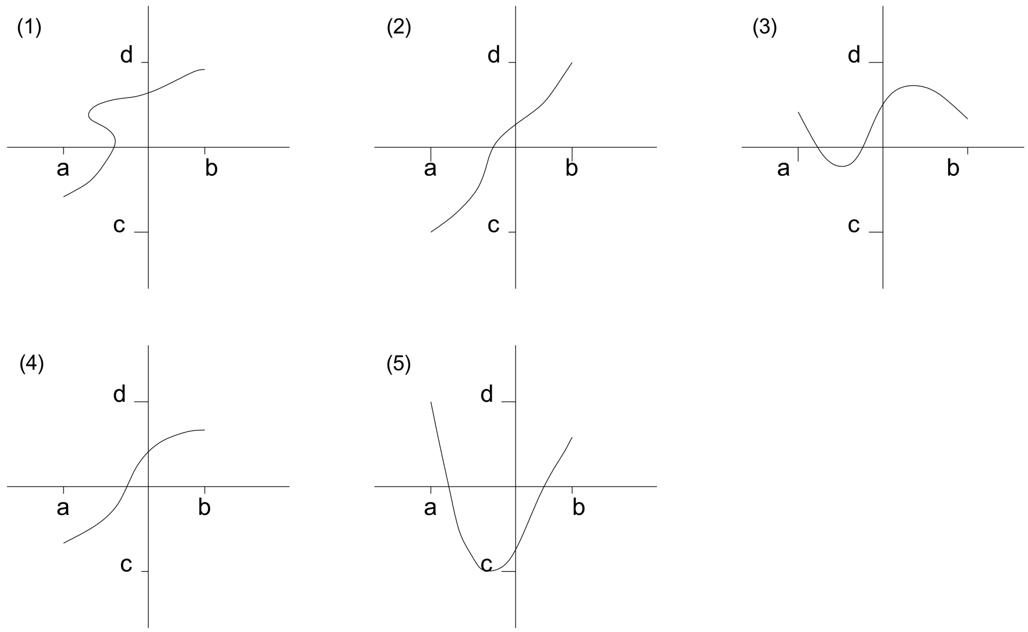

Abbildung 2: Bilder zu MC-Aufgabe 3.

3. Welche der Bilder in Abbildung 2 sind Graphen einer injektiven bzw. surjektiven Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$?

(a) 1 ist injektiv

(b) 2 ist injektiv

(c) 3 ist injektiv

(d) 4 ist injektiv

(e) 5 ist injektiv

(f) 1 ist surjektiv

(g) 2 ist surjektiv

(h) 3 ist surjektiv

(i) 4 ist surjektiv

(j) 5 ist surjektiv

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist injektiv.

(b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ist surjektiv.

5. Für welche der folgenden Verknüpfungen können wir eine abelsche Gruppe $(G, \circ, e)$ definieren?

(a) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b := \max\{a, b\}$.

(b) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b := \mathrm{kgV}(a, b)$.

(c) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $a \circ b := a^b$.

(d) $G := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$, $a \circ b := \frac{ab}{1-(a+b)+2ab}$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 7. Oktober 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.

Literatur

[1] Hermann Schichl and Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Verlag, 2012.