

## Lösungen Serie 4 – Vektorräume, Unterräume

1. (a) Keine Musterlösung
- (b) “ $\Rightarrow$ ”: Angenommen  $W \not\subset W'$  und  $W' \not\subset W$ . Seien  $w \in W \setminus W'$  sowie  $w' \in W' \setminus W$ , also  $w, w' \in W \cup W'$ . Sei  $w + w' \in W$ , dann ist wegen  $-w \in W$  auch  $w' = (w + w') + (-w) \in W$ , im Widerspruch zur Wahl von  $w'$ . Analog argumentiert man, falls  $w + w' \in W'$ . Also ist  $w + w' \notin W \cup W'$  und somit ist  $W \cup W'$  kein Unterraum.  
“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $W \subset W'$ , dann ist  $W \cup W' = W'$  und somit ein Unterraum nach Voraussetzung. Analog argumentiert man, wenn  $W' \subset W$ .
- (c) Sicherlich ist  $0_V \in W_1 + W_2$ . Seien  $u_1, v_1 \in W_1$  und  $u_2, v_2 \in W_2$  sowie  $\lambda \in \mathbb{K}$ , dann ist

$$(u_1 + u_2) - \lambda \cdot (v_1 + v_2) = (u_1 - \lambda \cdot v_1) + (u_2 - \lambda \cdot v_2) \in W_1 + W_2$$

und somit ist  $W_1 + W_2$  ein Unterraum.

Wir zeigen nun, dass  $W_1 + W_2$  der kleinste Unterraum von  $V$  ist, der  $W_1 \cup W_2$  enthält. Sei  $W \subset V$  ein Unterraum und sei  $W_1 \cup W_2 \subset W$ . Seien  $u_1 \in W_1$  und  $u_2 \in W_2$  beliebig, dann sind nach Annahme  $u_1, u_2 \in W$  und folglich auch  $u_1 + u_2 \in W$ . Also ist  $W_1 + W_2 \subset W$ . Da  $W$  beliebig war, folgt, dass jeder Unterraum von  $V$ , der  $W_1$  und  $W_2$  enthält, auch  $W_1 + W_2$ , und somit ist  $W_1 + W_2$  tatsächlich der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $W_1$  und  $W_2$  enthält.

2. “ $\Rightarrow$ ”: Angenommen  $V_\alpha$  ist ein Unterraum, dann ist  $0_{\mathbb{K}^3} = (0, 0, 0) \in V_\alpha$  und folglich  $\alpha = 0$ .  
“ $\Leftarrow$ ”: Wir müssen zeigen, dass  $V_0$  ein Unterraum ist. Gegeben  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , sei  $\Phi(x) := x_1 + x_2 + x_3$ .  $\Phi$  ist eine Abbildung  $\mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$  und  $V_0 = \Phi^{-1}(\{0\})$ . Seien  $x, y \in \mathbb{K}^3$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ , dann gelten

$$\begin{aligned}\Phi(x + y) &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = \Phi(x) + \Phi(y) \\ \Phi(\lambda \cdot x) &= (\lambda x_1) + (\lambda x_2) + (\lambda x_3) = \lambda(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda\Phi(x)\end{aligned}$$

wegen der Körperaxiome. Insbesondere ist  $\Phi(0_{\mathbb{K}^3}) = 0$  und also  $0_{\mathbb{K}^3} \in V_0$ , und für alle  $x, y \in V_0$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  gelten  $\Phi(x + y) = 0$  sowie  $\Phi(\lambda \cdot x) = 0$ .

3. Da  $0 - \lambda 0 = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ , folgt aus  $A_{ij} = B_{ij} = 0$ , dass  $A_{ij} - \lambda B_{ij} = 0$  gilt. Zudem erfüllt die Nullmatrix mit Einträgen  $A_{ij} = 0$  die Restriktionen aus Teilaufgaben (a) und (b). Beides zusammen zeigt, dass  $W_1, W_2, W_3, W_4$  sowie  $W_5$  Unterräume von  $V$  sind.

(a) Gegeben  $A \in V$ , seien  $B, C \in V$  definiert durch

$$B_{ij} := \begin{cases} A_{ij} & \text{falls } i \geq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C_{ij} := \begin{cases} A_{ij} & \text{falls } i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann sind  $B \in W_1$ ,  $C \in W_2$  und

$$i < j : (B + C)_{ij} = B_{ij} + C_{ij} = C_{ij} = A_{ij}$$

$$i \geq j : (B + C)_{ij} = B_{ij} + C_{ij} = B_{ij} = A_{ij}$$

Folglich ist  $V = W_1 + W_2$ . Sei  $A \in W_1 \cap W_2$ , dann ist  $A_{ij} = 0$  falls  $i < j$ , wegen  $A \in W_1$  und  $A_{ij} = 0$  falls  $i \geq j$  wegen  $A \in W_2$ . Also ist  $A_{ij} = 0$  für alle  $i, j$  und somit  $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ , also  $V = W_1 \oplus W_2$ .

- (b) Keine Musterlösung  
(c) Keine Musterlösung
4. (a) Keine Musterlösung  
(b) Keine Musterlösung  
(c) Sei  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2$  der Körper mit 2 Elementen  $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ . Da  $\mathbb{F}_2$  mit Addition eine Gruppe mit zwei Elementen ist, gilt  $-\bar{0} = \bar{0}$  und  $-\bar{1} = \bar{1}$  (vgl. Aufgabe 4 von Serie 2 oder Aufgabe 1 von Serie 3), also  $x = -x$  für alle  $x \in \mathbb{F}_2$ . Also ist  $\text{id}_{\mathbb{F}_2} \in V_1 \cap V_2$  und somit  $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ .
5. Wir bezeichnen mit  $0_{\mathcal{F}} : X \rightarrow V$  die Abbildung  $0_{\mathcal{F}}(x) = 0_V$  für alle  $x \in X$ .

(a) Der Beweis ist genau gleich wie in Aufgabe 2.

“ $\Rightarrow$ ”: Wenn  $\mathcal{F}_{x,v}$  ein Unterraum ist, dann ist  $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{x,v}$ . Aus  $0_V = 0_{\mathcal{F}}(x) = v$  folgt  $v = 0$ .

“ $\Leftarrow$ ”:  $0_{\mathcal{F}}(x) = 0_V$ , also  $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{x,0_V}$ . Seien  $f, g \in \mathcal{F}_{x,0_V}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ , dann ist

$$(f - \lambda \cdot g)(x) = f(x) - \lambda \cdot g(x) = 0_V - \lambda \cdot 0_V = 0_V$$

und folglich  $f - \lambda \cdot g \in \mathcal{F}_{x,0_V}$ . Also ist  $\mathcal{F}_{x,0_V}$  ein Unterraum.

(b) Sei  $W := \{h \in \mathcal{F}(X, V) \mid \exists v \in V : h(y) = v \forall y \in X\}$ . Sei  $f \in \mathcal{F}(X, V)$  beliebig, und sei  $f_x \in \mathcal{F}(X, V)$  definiert durch

$$f_x(y) := f(y) - f(x) \quad \forall y \in X$$

Dann ist  $f_x(x) = f(x) - f(x) = 0_V$  und also  $f_x \in \mathcal{F}_{x,0_V}$ . Sei  $h_{f(x)} \in W$  definiert durch

$$h_{f(x)}(y) := f(x) \quad \forall y \in X$$

Dann ist

$$\forall y \in X : f_x(y) + h_{f(x)}(y) = (f(y) - f(x)) + f(x) = f(y)$$

und folglich  $f = f_x + h_{f(x)}$ . Da  $f \in \mathcal{F}(X, V)$  beliebig war, haben wir also gezeigt, dass  $\mathcal{F}(X, V) = \mathcal{F}_{x,0_V} + W$ . Sei  $h \in \mathcal{F}_{x,0_V} \cap W$ , dann ist  $h(x) = 0_V$  wegen  $h \in \mathcal{F}_{x,0_V}$  und  $h(y) = h(x)$  für alle  $y \in X$ , wegen  $h \in W$ . Also ist  $h(y) = 0_V$  für alle  $y \in X$  und folglich  $\mathcal{F}_{x,0_V} \cap W = 0_{\mathcal{F}}$ .

**Abgabe der schriftlichen Aufgaben:** Vor Freitag, den 21. Oktober 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.