Serie 6:
Basis, Dimension und Quotientenräume

1. Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$. Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$ gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

   für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

   a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{C}^2$ ist, wenn gilt $ad - bc \neq 0$.

   b) Finden Sie zwei disjunkte Basen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathbb{C}^2$ (d.h. $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$).

2. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, und sei W ein Unterraum. Definieren Sie die folgende Relation $R \subset V \times V$:

$$v_1 R v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$$

   a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation definiert.

   b) Gegeben $v \in V$, sei $[v] \in V/_\sim$ die Äquivalenzklasse von v. Definieren Sie auf $V/_\sim$ eine Addition

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \qquad \text{für } [v_1], [v_2] \in V/_\sim$$

   sowie eine skalare Multiplikation

$$\lambda \cdot [v] := [\lambda \cdot v] \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } [v] \in V/_\sim$$

   Zeigen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind und dass $V/_\sim$ mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.

Bitte wenden!

c) Finden Sie eine Bijektion $\Phi : {}^{V}\!/_{W} \to {}^{V}\!/_{\sim}$, so dass

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) =& \Phi(x)+\Phi(y) && \text{für } x,y \in {}^{V}\!/_{W}\\ \Phi(\lambda\cdot x) =& \lambda\cdot\Phi(x) && \text{für } x \in {}^{V}\!/_{W}\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Existenz einer Bijektion, die mit den linearen Strukturen auf Definitions- und Bildbereich kompatibel ist, zeigt, dass die Mengen ${}^{V}\!/_{W}$ und ${}^{V}\!/_{\sim}$ zusammen mit ihren Vektorraumstrukturen informal "bis auf Umbenennung der Elemente gleich" sind. Eine Bijektion mit obigen Eigenschaften ist ein *Isomorphismus* und zwei Vektorräume mit einem Isomorphismus heissen *isomorph*.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $W \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass ein Unterraum $U \subset V$ existiert, so dass $W \oplus U = V$.

4. Seien $V := M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}W_1 :=& \{A \in V \mid A = A^T\}\\ W_2 :=& \{A \in V \mid A = -A^T\}\end{aligned}$$

Konstruieren Sie eine Bijektion $\Phi : {}^{V}\!/_{W_1} \to W_2$, so dass

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) =& \Phi(x)+\Phi(y) && \text{für } x,y \in {}^{V}\!/_{W_1}\\ \Phi(\lambda\cdot x) =& \lambda\cdot\Phi(x) && \text{für } \lambda\in\mathbb{R} \text{ und } x \in {}^{V}\!/_{W_1}\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

5. **Online Abgabe Serie 6:**

1. Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $S_1 \subset V$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Falls S_1 linear abhängig ist, so ist jeder Vektor $v \in S_1$ eine Linearkombination von Vektoren in $S_1 \setminus \{v\}$.

(b) Sei S_1 linear abhängig und $T \subset S_1$. Dann ist T linear abhängig.

(c) Sei S_1 linear unabhängig und $T \subset S_1$. Dann ist T linear unabhängig.

(d) Sei $S_2 \subset V$ mit $\langle S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle$, dann gilt $|S_2| \leq |S_1|$.

(e) Seien $\dim V < \infty$ und S_1 linear unabhängig. Sei $S_2 \subset V$ mit $\langle S_2 \rangle = V$, dann gilt $|S_1| \leq |S_2|$.

(f) Keine der Aussagen ist richtig.

2. Jeder Vektorraum hat eine endliche Basis

(a) richtig

(b) falsch

3. Sei V ein Vektorraum, $W_1, W_2 \subset V$ Unterräume. Seien $\{w_1, \ldots, w_m\}$ und $\{u_1, \ldots, u_l\}$ Basen von W_1 bzw. W_2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei $V = W_1 + W_2$. Dann ist $V/W_1 = \langle u_1 + W_1, \ldots, u_l + W_1 \rangle$.

(b) Sei $V = W_1 \oplus W_2$. Dann ist $\{w_1 + W_2, \ldots, w_m + W_2\} \subset V/W_2$ linear unabhängig.

(c) Keine der Aussagen ist richtig.

4. Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit drei Elementen. Sei $W \subset \mathbb{F}_3^2$ der Unterraum $W = \langle (1,1) \rangle$. Dann hat $\mathbb{F}_3^2/W$ drei Elemente.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 4. November 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.