Serie 9:
Basiswechsel & Dualraum

1. Betrachten Sie die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}$$

a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum ist.

b) Zeigen Sie, dass das *orthogonale Komplement*

$$E^\perp := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \forall (x', y', z') \in E : xx' + yy' + zz' = 0\}$$

ein nicht-trivialer Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist und zeigen Sie $E \oplus E^\perp = \mathbb{R}^3$.

c) Sei $P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die *orthogonale Projektion* auf E, d.h. P ist eine Projektion mit $\mathrm{Ker}(P_E) = E^\perp$ und $\mathrm{Im}(P_E) = E$. Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass

$$[P_E]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie $[P_E]_{\mathcal{E}_3}$.

2. Im Folgenden betrachten wir den Vektorraum der Polynome $P(\mathbb{R})$ sowie die Unterräume $P_d(\mathbb{R})$ der Polynome von Grad höchstens d. Setzen Sie für die ganze Aufgabe voraus, dass die Monome $\{x^n \mid n \geq 0\}$ linear unabhängig sind.[1] Im Folgenden seien

$$p_k(x) := x^k \quad \text{und} \quad q_k(x) := (x+1)^k \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

[1] Sie können dies unter Verwendung von Proposition 3.17 (Wachstum von Polynomfunktionen und Eindeutigkeit der Koeffizienten) im Analysisskript beweisen.

a) Sei $\mathcal{B}_d = (p_0, \ldots, p_d)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_d$ eine Basis von $P_d(\mathbb{R})$ ist.

b) Sei $\mathcal{C}_d = (q_0, \ldots, q_d)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_d$ eine Basis von $P_d(\mathbb{R})$ ist.

c) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $[I_{P_d(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}_d}^{\mathcal{C}_d}$ und $[I_{P_d(\mathbb{R})}]_{\mathcal{C}_d}^{\mathcal{B}_d}$ für $d = 2, 3$.

d) Betrachten Sie die Ableitung $D : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass D linear ist und dass die Restriktion $D|_{P_d(\mathbb{R})}$ eine lineare Abbildung $D_d : P_d(\mathbb{R}) \to P_{d-1}(\mathbb{R})$ definiert.

e) Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $[D_4]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3}$ sowie $[D_4]_{\mathcal{C}_4}^{\mathcal{C}_3}$.

f) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $[D_4]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{C}_3}$ unter Verwendung von Basiswechselmatrizen.

g) Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$$

Sei $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ die lineare Abbildung, so dass $[T]_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2} = A$. Bestimmen Sie $T(p)$ für

$$p(x) = 1 - 10x + x^3$$

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und seien $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ gegeben durch

$$f_1(x, y, z) = x - 2y, \quad f_2(x, y, z) = x + y + z, \quad f_3(x, y, z) = y - 3z$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ eine geordnete Basis von V^* ist und finden Sie eine geordnete Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von V, so dass $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$.

4. Sei $T : V \to W$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) T ist injektiv.

(b) Die duale Abbildung $T^* : W^* \to V^*$ ist surjektiv.

(c) Das Nullelement von V ist das einzige Element, das auf das Nullelement von W abgebildet wird.

(d) Für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein $g \in W^*$ mit $g(T(v)) \neq 0$.

5. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, sei W ein Unterraum.

Siehe nächstes Blatt!

a) Zeigen Sie, dass jede Linearform auf W eine Erweiterung auf V besitzt.

b) Sei $W^\perp := \{f \in V^* \mid W \subset \mathrm{Ker}(f)\}$. Zeigen Sie, dass $W^\perp \subset V^*$ ein Unterraum ist und zeigen Sie

$$\left({}^{V}\!/_{W}\right)^* \cong W^\perp$$

c) Finden Sie einen kanonischen Isomorphismus

$$\left({}^{V^*}\!/_{W^\perp}\right)^* \cong W$$

Bitte wenden!

6. Online Abgabe Serie 9:

1. Jede Basiswechselmatrix ist invertierbar.

(a) richtig

(b) falsch

2. Sei $\mathcal{E}_2 := (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{C} := \left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix} \right) \right)$ eine weitere geordnete Basis. Bestimmen Sie die $Q := [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{C}}$.

(a) $Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(e) $Q = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Siehe nächstes Blatt!

3. Gegeben seien die folgenden geordneten Basen von $P_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B} = (1, x, x^2), \quad \mathcal{C} = (x^2, (x+1)^2, (x+2)^2)$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $Q := [I_{P_2(\mathbb{R})}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

(a) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4. Sei $T : V \to V^*$ ein Isomorphismus und $\mathcal{B}$ eine endliche geordnete Basis für V so gilt $T(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$

(a) richtig

(b) falsch

Bitte wenden!

5. Seien V, W endlichdimensional und V isomorph zu W, so ist V^* isomorph zu W^*

(a) richtig

(b) falsch

6. Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$. Seien $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{C}$ geordnete Basen von V bzw. W. Sei $\mathcal{C}^* = (f_1, \ldots, f_m)$ die zu $\mathcal{C}$ duale Basis von W^*. Dann ist für beliebige $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})_{ij} = f_i(T(v_j)) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

(a) richtig

(b) falsch

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Vor Freitag, den 25. November 12:00 Uhr mittags im Fach Ihrer Assistentin bzw. Ihres Assistenten im HG J 68.