1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$

(a) ☐ existiert $x \in S$ so dass $x < \beta + \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$;

Falsch: wenn $x < \beta + \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$, dann $x \leq \beta$, also $x = \beta$ weil β das Infimum von S ist; das impliziert $\beta \in S$, aber das ist nicht immer so, z.B. $S = (0,1)$, $\beta = 0 \notin S$.

☐ die Menge $(\beta, \beta+1) \cap S$ ist nicht leer;

Falsch: z.B. $S = \{0\} \cup (2,3)$: $\beta = 0$ und deshalb $(\beta, \beta+1) = (0,1)$; also$(0,1) \cap S = \emptyset$.

☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert $x \in S$, so dass $\beta \leq x < \beta + \epsilon$.

Richtig: wenn nicht, i.e. wenn $\epsilon > 0$ existiert, so dass $\beta + \epsilon \leq x$ für jede $x \in S$, dann wäre $\beta + \epsilon$ eine untere Schranke für S, grösser als β, was der Definition von Infimum widerspricht.

(b) ☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine untere Schranke b von S, so dass $a < b < a + \epsilon$;

Falsch: a ist die Grösste der unteren Schranken: für jede untere Schranke b muss immer $a \geq b$ sein.

☐ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Minimum;

Falsch: z.B. $S = (0,1)$, $a = 0$, $S \setminus \{0\} = S$ besitzt kein Minimum.

☐ a ist das Supremum der unteren Schranken.

Richtig: es folgt aus der Definition von Infimum.

(c) ☐ für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\log(q^2+1) \in A$;

Richtig: die Funktion $x \mapsto \log(x^2+1)$ ist monoton, wachsend und unbeschränkt. Das impliziert, dass für jedes $M > 0$, ein $q \in \mathbb{Q}$ so dass $\log(q^2+1) \geq M$ existiert, deshalb A muss von oben unbeschränkt sein.

☐ für jedes $a \in A$ gilt $a \geq 10^4$;

Falsch: z.B. $A = [10^4, 10^5]$ erfüllt die Bedingung und ist beschränkt.

☐ für jedes $a \in A$ gilt $a \geq a^2$.

Falsch: jedes $a \in [0,1]$ erfüllt $a \geq a^2$, also $A = [0,1]$ erfüllt die Bedingung und ist beschränkt.

1.2. Bestimmung von Supremum und Infimum M_1 ist beschränkt von oben durch 2, weil $1/n \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$, und dieser Wert wird für $n = 1$ angenommen, also $\sup M_1 = \max M_1 = 2$. M_1 ist beschränkt von unten durch 1, weil $1 + 1/n \geq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$; von dem archimedischen Prinzip folgt, dass $\forall \epsilon > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $1/n \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, daher

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \epsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Das impliziert, aus der Definition von Infimum, dass $\inf M_1 = 1$. Da $1 + 1/n$ immer strikt grösser als 1 ist, $1 \notin M_1$, also besitzt M_1 kein Minimum.

M_2 ist beschränkt von unten durch 0, weil ihre Elemente positiv sind. Falls $x = 0$, gilt $\frac{|0|}{|0|+1} = 0$, damit schliessen wir, dass $\inf M_2 = \min M_2 = 0$. M_2 ist beschränkt von oben durch 1, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $1 + |x| > |x|$, also $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und dadurch $\sup M_2 \leq 1$. Um $\sup M_2 = 1$ zu schliessen, eine Möglichkeit ist wie folgt: wir betrachten $x = n \in \mathbb{N}_{>0}$ und bemerken, dass

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Aus den archimedischen Prinzip, für jedes $\epsilon > 0$ existiert n_0 so dass $1/n \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$, also

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{1+\epsilon} = 1 + \left(\frac{1}{1+\epsilon} - 1 \right) = 1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \quad \forall n \geq n_0.$$

Wir bemerken, dass weil ϵ beliebig klein sein kann, kann $\epsilon/(1+\epsilon)$ ebenso klein sein, wie man will. Wir schliessen, dass $\sup M_2 = 1$. M_2 besitzt kein Maximum, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$, $\frac{|x|}{|x|+1} < 1$ strikt: es ist nicht möglich, den Wert 1 zu erreichen.

Wir schreiben M_3 ungekürzt:

$$M_3 = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right] = \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right] \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right] \cup \cdots$$

Es ist dann klar, dass $\sup M_3 = \max M_3 = 1$. Wir sehen, dass $1/n \in M_3$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$: aus den archimedischen Prinzip schliessen wir, wie für M_1, dass $\inf M_3 = 0$, aber das Minimum nicht erreicht wird, weil $0 \notin M_3$.

Was M_4 betrifft, sehen wir, dass für fixierte $x, y > 0$ (z.B. $x = 1$, $y = 1$) der Ausdruck $\frac{x+y}{z}$, falls $z > 0$ ist, gegen $+\infty$ divergiert wenn z nach 0 strebt: z.B. falls $z = 1/n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, gilt

$$\frac{x+y}{z} = n(x+y),$$

also ist es für jedes $M > 0$ immer möglich, ein n zu finden, so dass $n(x+y) > M$; somit folgt $\sup M_4 = +\infty$, i.e. M_4 ist unbeschränkt von oben. Analog, wenn für fixierte $x, y > 0$, $z = -1/n$ betrachtet wird, divergiert der Ausdruck gegen $-\infty$, also $\inf M_4 = -\infty$, i.e. M_4 ist unbeschränkt von unten.

1.3. Abrundungsfunktion Weil immer $[x] \leq x$ gilt, können wir abschätzen:

$$[\alpha n]\frac{1}{n} \leq \alpha n \frac{1}{n} = \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0},$$

also ist M von oben beschränkt. Wir wollen zeigen, dass $\sup M$ genau α ist: sei

$$\alpha = M.N_1N_2N_3\dots$$

die Dezimaldarstellung von α, wobei $M \in \mathbb{N}$ und $N_1, N_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$. Wir sehen, dass, für $n = 1, 10, 100, 1000, \dots, 10^k, \dots$ gilt

$$\begin{aligned}
[\alpha 1]\frac{1}{1} &= M \ , \\
[\alpha 10]\frac{1}{10} &= MN_1\frac{1}{10} = M.N_1 \ , \\
[\alpha 100]\frac{1}{100} &= MN_1N_2\frac{1}{100} = M.N_1N_2 \ , \\
[\alpha 1000]\frac{1}{1000} &= MN_1N_2\frac{1}{1000} = M.N_1N_2N_3 \ , \\
&\dots \\
[\alpha 10^k]\frac{1}{10^k} &= M.N_1N_2N_3\dots N_k \ ,
\end{aligned}$$

und so weiter, für jedes k. Diese Folge strebt deutlich nach α . Es muss dann $\sup M \geq \alpha$ sein - aber oben wurde gezeigt, dass $\sup M \leq \alpha$. Es ist dann nötig, dass $\sup M = \alpha$.

1.4. Komplexe Zahlen - Wiederholung Wir betrachten $z_1 = -3$:

- kart. Form: wie gegeben,
- Polarform: $-3 = 3(-1) = 3e^{i\pi}$,
- Betrag: 3,
- Konjugierte: -3,
- Reziproke: $-1/3$.

Wir betrachten $z_2 = 2i$:

- kart. Form: wie gegeben,
- Polarform: $2i = 2(i) = 2\mathrm{e}^{i\pi/2}$,
- Betrag: 2,
- Konjugierte: -2i,
- Reziproke:

$$\frac{1}{2i} = \frac{i}{i}\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

Wir betrachten $z_3 = (1+i)/(1-i)$:

- kart. Form:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1+i}\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i,$$

- Polarform: $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$,
- Betrag: 1,
- Konjugierte: $-i$,
- Reziproke:

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i}\frac{1}{i} = -i.$$

Wir betrachten $z_4 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{i\pi/6}$:

- kart. Form:

$$\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

- Polarform: wie gegeben,
- Betrag: $\sqrt{3}$,
- Konjugierte: $\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- Reziproke:

$$\frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\pi/6}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi/6}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6},$$

Wir betrachten $z_5 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i3\pi/4}$:

- kart. Form:
$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i,$$
- Polarform: wie gegeben,
- Betrag: $\sqrt{2}$,
- Konjugierte: $-1 - i$,
- Reziproke:
$$\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i3\pi/4}} = \frac{\mathrm{e}^{-i3\pi/4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2},$$

Wir betrachten $z_6 = \cos\alpha + i\sin\alpha$:

- kart. Form: wie gegeben
- Polarform: $\mathrm{e}^{i\alpha}$,
- Betrag: 1,
- Konjugierte: $\cos\alpha - i\sin\alpha$,
- Reziproke: $\mathrm{e}^{-i\alpha} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha$,

Wir betrachten $z_7 = \sin\alpha + i\cos\alpha$: weil
$$\sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha),$$
gilt $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha)$, also wie für z_6:

- kart. Form: $\cos(\pi/2 - \alpha) + i\sin(\pi/2 - \alpha)$,
- Polarform: $\mathrm{e}^{i(\pi/2 - \alpha)}$,
- Betrag: 1,
- Konjugierte: $\cos(\pi/2 - \alpha) - i\sin(\pi/2 - \alpha)$,
- Reziproke:
$$\mathrm{e}^{-i(\pi/2-\alpha)} = -i\mathrm{e}^{i\alpha} = \sin(\alpha) - i\cos(\alpha).$$

.