2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz in $\mathbb{R}$

(a) ☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n;$$

Falsch: z.B. die Nullfolge: $c_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kann als Summe von $a_n = n$ und $b_n = -n$ geschrieben werden, und sowohl a_n als auch b_n divergieren.

☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

Richtig: wenn die Folge (b_n) nach b konvergiert, konvergiert die Folge $(-b_n)$ nach $-b$; dann ($\to$ Satz 3.3.2) konvergiert $a_n = c_n + (-b_n)$.

☐ falls (a_n) und (b_n) beschränkt sind, muss (c_n) beschränkt sein.
Richtig: wenn $|a_n| \le A$ und $|b_n| \le B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, dass

$$|c_n| \le |a_n| + |b_n| \le A + B \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also ist (c_n) beschränkt.

☐ falls (c_n) konvergiert, konvergiert wenigstens eine zwischen (a_n) und (b_n);
Falsch: wie oben, ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $a_n = n$, $b_n = -n$ und $c_n = 0$.

(b) ☐ falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, dann konvergiert (a_n);
Falsch: das bedeutet nur, dass (a_n) beschänkt ist. Zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ ist wie bekannt nicht konvergent, aber wir können $\epsilon = 2$ und $a = 1$ wählen um die Bedingung zu erfüllen.

☐ falls (a_n) konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ konvergent;
Richtig: weil sowohl $n \mapsto a_n$ als auch $n \mapsto a_{n+1}$ zum gleichen Grenzwert konvergieren, muss b_n mit $\to$ Satz 3.3.2 (nach 0) konvergieren.

☐ falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist (a_n) konvergent;
Falsch: ein Gegenspiel ist gegeben durch die Partialsummen der harmonischen Reihe:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Bekanntlich (Beispiel 3.7.1) ist $(a_n)_n$ divergent, aber für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $b_n = 1/(n+1)$, also konvergiert b_n nach 0, aber a_n ist divergent.

☐ falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a \ \forall n \in \mathbb{N}$, und $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann ist (a_n) konvergent.
Richtig: das ist eigentlich → Satz 3.3.1.

(c) Für beliebiges $\epsilon > 0$ gilt

$$\left|\frac{1}{n^2+1}\right| < \epsilon \Longleftrightarrow n^2 + 1 > \frac{1}{\epsilon} \Longleftrightarrow n > \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}.$$

In unserem Fall $\epsilon = 1/100$, also $|a_n| < 0.001$ sobald $n > \sqrt{99} \sim 9.95$, also $n \geq 10$. Daraus folgt, dass nur

☐ sobald $n > 9$

richtig ist.

2.2. Teilmengen der komplexen Zahlenebene Hier benützen wir die Notation $z = x + iy$.

M_1**:** wir sehen, dass

$$\bar{z} = -z \Longleftrightarrow \bar{z} + z = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Somit ist M_1 die y-Achse.

M_2**:** wir sehen, dass

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z\bar{z} = 1 \Longleftrightarrow |z|^2 = 1.$$

Somit ist M_2 die Teilmenge der komplexen Zahlen, die Betrag 1 haben: das ist der Einheitskreis.

M_3**:** Mit $a = a_1 + ia_2$ sehen wir, dass

$$\begin{aligned} |z-a| = 3 &\Longleftrightarrow |(x-a_1) + i(y-a_2)| = 3 \\ &\Longleftrightarrow |(x-a_1) + i(y-a_2)|^2 = 3^2 \\ &\Longleftrightarrow (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = 3^2. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist genau die Gleichung eines Kreises mit Zentrum (a_1, a_2) und Radius 3.

M_4**:** Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} |z-1| = |z+1| &\iff |z-1|^2 = |z+1|^2 \\ &\iff (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ &\iff -2x = 2x \iff x = 0. \end{aligned}$$

Somit ist M_4 die y-Achse.

M_5**:** Genau wie für M_5 sehen wir, dass M_5 die Halbebene definiert durch $x \leq 0$ ist.

M_6**:** Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} &= \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-i}\frac{z-i}{z+i} \\ &= \frac{(\bar{z}-i)(z-i)}{|z+i|^2} \\ &= \frac{|z|^2 - i\bar{z} - iz - 1}{|z+i|^2} \\ &= \frac{x^2 - 2ix + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck ist definiert für $(x, y) \neq (0, -1)$, d.h. $z \neq -i$. Folglich ist,

$$\Im\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0 \iff \frac{2x}{x^2 + (y+1)^2} = 0 \iff x = 0.$$

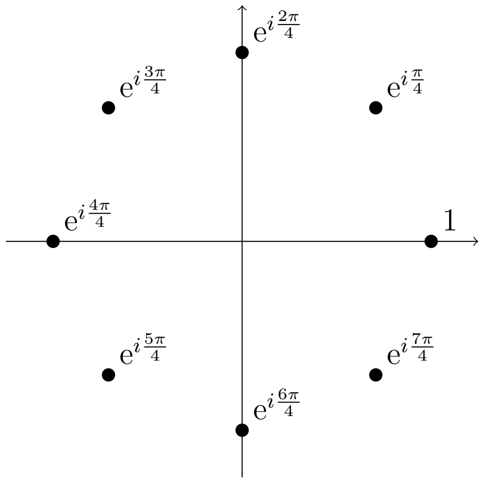
Wir schliessen, dass M_6 die Gerade $x = 0$ ist, *ohne* den Punkt $z = (0, -1)$, d.h. $z = -i$.

M_7**:** In Polarkoordinaten gilt $(1+i) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, also sehen wir, dass

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n = \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}.$$

Weil $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta + 2k\pi}\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$, besteht M_7 aus 8 Punkten, die für $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$ gefunden werden:

$$M_7 = \{1, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{4}}, \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}, \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{4}}, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{4}}, \mathrm{e}^{i\frac{6\pi}{4}}, \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}}\}.$$



2.3. Berechnung von Folgengrenzwerten

a_n: Zuerst sehen wir, dass

$$\lim_n \frac{2-3n}{2n+1} = \lim_n \frac{\cancel{n}\left(\frac{2}{n}-3\right)}{\cancel{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim_n \frac{\left(\frac{2}{n}-3\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)} = -\frac{3}{2}.$$

Dann können wir → Satz 3.3.2 (ii) benutzen um zu schliessen

$$\lim_n \left(\frac{2-3n}{2n+1}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}.$$

b_n: Es gilt:

$$\sqrt[n]{3^n+7^n} = \left(7^n\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)\right)^{1/n} = 7\left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)^{1/n}.$$

Weil $3/7<1$, folgern wir, dass

$$\lim_n \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim_n \left(\left(\frac{3}{7}\right)^n+1\right)^{1/n} = \lim_n 1^{1/n} = 1,$$

also $\lim_n \sqrt[n]{3^n+7^n} = 7$.

c_n: Wir multiplizieren und teilen durch $\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n-1}) &= \frac{(n+5)-(n-1)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

Weil der Nenner für $n \to \infty$ nach $+\infty$ divergiert, und der Zähler konstant ist, schliessen wir, dass $\lim_n(\sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}) = 0$.

d_n: Wir raten, dass die Folge nach 1 konvergiert. Um das zu beweisen, sei $\epsilon > 0$ fixiert. Es gilt:

$$|d_n - 1| = |0.\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ mals}}1| = \frac{1}{10^{n+1}},$$

also wählen wir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{10^{N_\epsilon+1}} < \epsilon,$$

das heisst $N_\epsilon > \log_{10}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) - 1$. Somit

$$|d_n - 1| < \epsilon \quad \forall N \geq N_\epsilon,$$

und das ist genau die Definition von Konvergenz nach 1.

e_n: Wir sehen, dass

$$e_n = \begin{cases} 3 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1/3 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

d.h. die Folge pendelt zwischen 3 und 1/3, und kann deshalb nicht konvergieren.

f_n: Wir sehen, dass

$$f_n = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n-1 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also gilt $f_n \geq n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert, dass die Folge nach $+\infty$ divergiert.

g_n: Es gilt:

$$\frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)} = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}.$$

Weil sowohl 2/3 als auch 3/4 kleiner als 1 sind, gilt $\lim_n(2/3)^n = 0$ und $\lim_n(3/4)^n = 0$, danach schliessen wir mit → Satz 3.3.2 (ii), dass

$$\lim_n \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n} = \lim_n \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

h_n**:** Weil die Folge $(-1)^n$ beschränkt ist, und weil die Folge $1/n$ nach 0 konvergiert, schliessen wir, dass

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

2.4. Äquivalente Bedingungen von Konvergenz Wir beweisen "(1) $\Rightarrow$ (2)" durch "(2) falsch $\Rightarrow$ (1) falsch". Die Negation von "$\forall\, \epsilon > 0$, M_ϵ ist endlich" ist "$\exists\, \epsilon > 0$ so dass M_ϵ unendlich ist". Also, falls ein solches ϵ existiert, besteht M_ϵ aus einer unendlichen Folge $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ so dass $a_{n_j} \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)$, d.h.

$$|a_{n_j} - a| \geq \epsilon \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

und das meint genau, dass (1) falsch ist.

Wir beweisen danach "(2) $\Rightarrow$ (1)". Für bestimmtes $\epsilon > 0$, sei $N \in \mathbb{N}$ die grösste Zahl, so dass $a_N \in M_\epsilon$. Für jedes $n > N$ gilt dann $a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, d.h. $|a_n - a| < \epsilon$. Dann setzen wir $N_\epsilon = N + 1$.