3.1. MC Frage: Folgen in $\mathbb{R}$

☐ gilt es immer $H \neq \emptyset$;

Richtig: Da $(a_n)_n$ beschränkt ist, gilt der Satz von Bolzano-Weierstrass (3.4.1).

☐ H ist immer endlich;

Falsch: Wir betrachten zum Beispiel die rationale Zahlen, die in $[0, 1]$ liegen, d.h. die Elemente

$$\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \quad \text{so dass } n \neq 0, m \leq n.$$

Wir ordnen diese Zahlen in eine Folge $(a_n)_n$ an, und zwar:

$$\begin{array}{llllcllll}
0, & & & & & & & & a_0, \\
\frac{2}{2}, & \frac{1}{2}, & & & & & & a_1, & a_2, \\
\frac{3}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{1}{3}, & & & & a_3, & a_4, & a_5 \\
\frac{4}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{1}{4}, & & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, \\
\dots & & & & & & & & \dots
\end{array}$$

Es gibt natürlich viele Terme, die den gleichen Wert haben. Diese Folge ist so, dass *jede reelle Zahl in* $[0, 1]$ *ein Häufungspunkt ist!* Insbesondere gibt es überzählbar viele Häufungspunkte. Mann kann das wie folgt beweisen: für jedes $\delta > 0$ and jedes $x \in [0, 1]$, gibt es immer mindestens ein Element $a_n \in \mathbb{Q}$, welches in $(x - \delta, x + \delta) \cap [0, 1]$ liegt (Bemerkung 3.4.1).

☐ es ist möglich, dass H unendlich ist;

Richtig: wie oben erläutert.

☐ falls $x \notin H$, existiert $\delta > 0$ so, dass $(x - \delta, x + \delta) \cap H = \emptyset$.

Richtig: Gemäss Bemerkung 3.4.1, gilt: falls für jedes $\delta > 0$ immer $(x - \delta, x + \delta) \cap H \neq \emptyset$ gilt, existiert a_l so, dass $a_l \in (x - \delta, x + \delta)$. Das aber bedeutet, dass auch x ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist.

3.2. Grenzwerte mit der Eulersche Zahl

(a) Wir können der n-ten Term der Folge schreiben als

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Wir wissen, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \mathrm{e},$$

weil $\lim_n(1+1/n)^n = \mathrm{e}$ und $n \mapsto (1+1/n^2)^{n^2}$ eine Teilfolge von $n \mapsto (1+1/n)^n$ ist. Da $\mathrm{e} > 1$ und $1/n$ nach 0 strebt, schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{1/n} = 1.$$

(b) Da $a+\frac{1}{n} \geq a > 1$, schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

(c) Wir können schreiben

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n,$$

also

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^n = +\infty.$$

(d) Wir sehen, dass

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{n \text{ mal}}} = \left(\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} < \frac{1}{n},$$

daraus erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Da also $n!/n^n \geq 0$, schliessen wir $\lim_{n\to\infty} n!/n^n = 0$.

(e) Wir wählen eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ so, dass $k \geq x$. Sei dann $n > k$. Weil $n!$ als

$$n! = k!(k+1)(k+2)\cdots(n-1)n$$

geschrieben werden kann, folgern wir, dass

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{k^n}{n!} = \frac{k^n}{k!(k+1)(k+2)\cdots n} = \frac{k^k}{k!}\frac{k}{k+1}\frac{k}{k+2}\cdots\frac{k}{n} \leq \frac{k^k}{k!}\frac{k}{n}.$$

Damit folgt, weil k fixiert ist, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{k^k}{k!}\frac{k}{n} = \frac{k^{k+1}}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Damit schliessen wir, weil auch $x^n/n! \geq 0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$.

(f) Wie in (a) und mithilfe von (e) schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n^n}\right)^{\frac{n!}{n^n}} \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^0 = 1.$$

3.3. Wachstumsraten Die Ungleichungskette ist wie folgt:

$$n^\alpha \leq x^n \leq n! \leq n^n.$$

Zweite Ungleichung: Wie in 3.2 (e), gilt für eine natürliche Zahl so dass $k \geq x$ (z.B. $k = [x]+1$)

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{k^{k+1}}{k!}\frac{1}{n}.$$

Es ist jetzt genug, N_0 so dass $N_0 \geq k^{k+1}/k!$, da denn

$$\frac{x^n}{n!} \leq \frac{k^{k+1}}{k!}\frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow x^n \leq n! \quad \forall n \geq N_0.$$

Dritte Ungleichung: Wie in 3.2 (d), wir sehen, dass

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall n \geq 1,$$

also $n! \leq n^n$ für alle $n \geq 1$.

3.4. Induktive Folge

(a) Wir erinnern uns daran, dass die Wurzel $x \mapsto \sqrt{x}$ monoton wachsend ist, das heisst, falls $0 \leq x \leq y$, dann $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$. Insbesondere gilt, für alle $x, y \geq 0$, immer $\sqrt{x+y} \geq \sqrt{x}$.

(i) Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \leq \sqrt{4} = 2, \\ a_2 &= \sqrt{2+a_1} \leq \sqrt{2+2} \leq 2, \\ a_3 &= \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2, \\ &\dots \end{aligned}$$

also wollen wir durch Induktion beweisen, dass $a_n \leq 2$ für alle n gilt. *Verankerung:* für $n = 0$, $a_0 = \sqrt{2} \leq 2$. *Induktionsschritt:* nehmen wir an, dass $a_n \leq 2$. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2,$$

wie behauptet. Die Folge ist dann beschränkt.

(ii) Wir benutzen nochmals Induktion um zu beweisen, dass die Folge monoton wachsend ist. *Verankerung:* für $n = 1$, $a_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_0$. *Induktionsschritt:* nehmen wir an, dass $a_n \geq a_{n-1}$. Dann sehen wir, dass

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \geq \sqrt{2+a_{n-1}} = a_n,$$

wie gewollt. Wir haben bewiesen, dass $(a_n)_n$ beschränkt und wachsend ist: durch Satz 3.3.1 (Monotone Konvergenz) folgern wir, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ existiert. Weil $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, schliessen wir durch Satz 3.3.2, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n+1} \sqrt{2+a_n} = \sqrt{2+a},$$

also

$$a^2 - 2 - a = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung 2. Ordnung sind 2 und -1: weil immer $a_n > 0$ gilt, ist dann nur $a = 2$ relevant. Schlussendlich erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = 2.$$

(b) Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1}{3}, \\ a_3 &= \frac{1/3}{1+1/3} = \frac{1}{4}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Also ist es "klar" das die Grenzwert 0 ist. Aber wir müssen dies streng beweisen! Die Strategie ist wie in (a): wir zeigen, dass die Folge beschränkt und monoton fallend ist, um Satz 3.3.1 zu benutzen. Weil $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = a_n/(1+a_n)$, folgt

$$0 \leq a_n \leq 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

weil der Nenner immer grösser ist als der Zähler. Das zeigt Beschränktkeit und Monotonie. Wir schliessen, dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und gilt

$$a = \frac{a}{1+a} \Leftrightarrow a^2 + a = a \Leftrightarrow a = 0.$$

3.5. Gerade und ungerade Teilfolgen "(i) $\Rightarrow$ (ii)": Sei a der Grenzwert der gemeinsam geraden und ungeraden Teilfolge. Aus der Definition von Konvergenz, existieren für jedes $\epsilon > 0$, $N'_\epsilon, N''_\epsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_{2n} - a| < \epsilon \quad \text{für } n \geq N'_\epsilon \quad \text{und} \tag{1}$$
$$|a_{2n+1} - a| < \epsilon \quad \text{für } n \geq N''_\epsilon. \tag{2}$$

Damit setzen wir $N_\epsilon = \max\{2N'_\epsilon, 2N''_\epsilon + 1\}$: es gilt dann

$$|a_m - a| < \epsilon \quad \text{für jedes } m \geq N_\epsilon,$$

weil falls m gerade ist, gilt (1), falls ungerade, (2).

"(ii) $\Rightarrow$ (i)": da die Folge konvergent ist, konvergiert jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert (siehe 3.6), insbesondere konvergieren die gerade und ungerade Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert.

3.6. Konvergente Teilfolge "(i) $\Rightarrow$ (ii)": wenn eine Folge $(a_n)_n$ nach a konvergiert, konvergieren alle ihren Teilfolgen gegen a. Tatsächlich, sei $(a_{n_j})_j$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$. Für jedes $\epsilon > 0$, existiert $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon. \tag{3}$$

Da $(a_{n_j})_j$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$ ist, gilt $n_1 \geq 1$; weil $n_2 > n_1$, folgt, dass $n_2 \geq 2$. Ähnlich gilt, für jedes $k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq k$, also falls (3) gilt, gilt auch

$$|a_{n_j} - a| < \epsilon \quad \text{für jedes } j \geq N_\epsilon.$$

Dies bedeutet genau, dass $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a$.

"(ii)⇒(i)": eine triviale Teilfolge von $(a_n)_n$ ist $(a_n)_n$ selbst. Da jede Teilfolge konvergiert, konvertiert also die ursprüngliche Folge.