4.1. MC-Fragen: Reihen und Cauchy-Folgen

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern, d.h. $a_n \geq 0$ für jedes n. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass die Reihe divergiert?

☐ $a_n \geq 1/n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

Ungenügend: zum Beispiel betrachten wir

$$a_n = \begin{cases} 1/n & \text{falls } n \text{ Zweierpotenz,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In anderen Worten: falls $n = 2^k$ für einiges k, dann $a_n = 2^{-k}$, falls n nicht Zweierpotenz, ist $a_n = 0$. Es gilt $a_n = 1/n$ für jedes n Zweierpotenz, also undendliche n, aber es gilt auch für jedes n, dass $a_n \leq 2^n$, also ist die Reihe absolut konvergent.

☐ $a_n > 2^{-n}$ für undendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

Ungenügend: die Reihe mit Gliedern $a_n = 2 \cdot 2^{-n}$ ist absolut konvergent.

☐ es existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1/\sqrt{n}$ für jedes $n \geq N_0$.

Richtig: $\sum_{N=N_0}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ ist divergent, also weil

$$\sum_{n+1}^{\infty} a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N_0-1} a_n}_{\text{bestimmt Zahl}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{N_0-1} a_n + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gilt, ist die Reihe divergent.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

Falsch: zum Beispiel ist $x_n = 1/n$ Cauchy (weil konvergent), aber wie bekannt ist $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent.

☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;

Falsch: jede Cauchy-Folge ist konvergent, nicht notwendigerweise mit Grenzwert 0.

☐ ist x_n beschränkt.

Richtig: jede Cauchy-Folge ist konvergent, also beschränkt.

4.2. Reihen reellen Zahlen

Wir bezeichnen mit a_n das Glied jeder Folge.

(a) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{((n+1)n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+1)},$$

also $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4 < 1$. Damit schliessen wir, das die Reihe absolut konvergent ist.

(b) Die Reihe ist einfach die harmonische Reihe ohne die ersten 100 Glieder, ist also divergent.

(c) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz. Wir benutzen das Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{5}{n\sqrt[n]{n}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 5/n = 0 < 1$, also ist die Reihe absolut konvergent.

(d) Wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

also muss die Reihe divergent sein (Bemerkung 3.7.1).

(e) Weil $a_n \geq 0$, ist absolute Konvergenz äquivalent zu Konvergenz, und wir bemerken, dass diese Reihe ähnlich wie die Teleskopsumme ist. Wir suchen zuerst a und b so dass

$$\frac{1}{n(n+4)} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+4}.$$

Wir sehen, dass

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+4} = \frac{(a-b)n + 4a}{n(n+4)},$$

also finden wir $a = b = 1/4$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots\right).$$

Also folgern wir, wie für die Teleskopsumme, dass die Partialsummen die Form

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+4)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4}\right)$$

haben. Somit schliessen wir, dass die Reihe absolut konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{48}$$

ist.

4.3. Reihen mit π Die Reihe mit $2n$ ist klar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}.$$

Was die anderen Reihen betrifft, so bemerken wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^2} + \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} = \sum_{n \text{ gerade}}\frac{1}{n^2} - \sum_{n \text{ ungerade}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Damit schliessen wir, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8},$$

und dann

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

4.4. Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellen Parameter Wir bezeichnen die Folgenglieder jeweils a_n.

(a) Falls $|x| \geq 1$ sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|x|^{n!} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x|^{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty}|x|^n,$$

und die rechte Seite ist eine Geometrische Reihe mit Basis $|x| < 1$, also konvergent.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $|x| \geq 1$ divergent und für $|x| < 1$ absolut konvergent.

(b) Falls $x = 0$, sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \neq 0$, also muss die Reihe divergieren. Falls $x \neq 0$, wir sehen, dass

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{1 + n^2x^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}x^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

und die Reihe auf der rechten Seite ist bekanntlich konvergent, weil $3/2 > 1$ (Beispiel 3.7.4). Wir folgern, dass die Reihe absolut konvergent ist.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $x = 0$ divergent und für $x \neq 0$ absolut konvergent.

(c) Falls $x = 1$ oder $x = -1$, ist $a_n = 1/2$ für jedes n, also divergiert die Reihe. Falls $|x| > 1$, wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{|x|^n} = 1 \neq 0,$$

also muss die Reihe divergent sein. Falls $|x| < 1$, gilt

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{1 + |x|^n} \leq |x|^n.$$

Somit gilt wie in (a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < \infty.$$

Folglich ist die Reihe absolut konvergent.

Zusammenfassend: Die Reihe ist für $|x| \geq 1$ divergent und für $|x| < 1$ absolut konvergent.

(d) Wir benutzen das Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1 + x}{n + x}\right| = 0 \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R},$$

also ist die Reihe absolut konvergent.

Zusammenfassend: die Reihe ist absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(e) Falls $x = 1$ oder $x = -1$, ist $a_n = 1/2$ für jedes n, also divergiert die Reihe. Falls $|x| < 1$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} = 1,$$

d.h. die Reihe ist divergent. Falls schlussendlich $|x| > 1$, gilt

$$\left|\frac{1}{1 + x^{2n}}\right| \leq \frac{1}{(x^2)^n},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2)^n}.$$

Damit schliessen wir wie in (a), dass die Reihe absolut konvergent ist.

Zusammenfassend: die Reihe ist für $|x| \leq 1$ divergent und für $|x| > 1$ absolut konvergent.

(f) Wir benutzen das Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^x}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^x} = \frac{((n+1)n!)^x}{(n+1)^n(n+1)} \frac{n^n}{(n!)^x} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (n+1)^{x-1}.$$

Weil

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (1+n)^{x-1} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1, \\ 0 & \text{falls } x < 1, \end{cases}$$

schliessen wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 1, \\ 1/\mathrm{e} & \text{falls } x = 1, \\ 0 & \text{falls } x < 1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir, dass die Reihe für $x \leq 1$ absolut konvergent und für $x > 1$ divergent ist.

4.5. Bedingt konvergente Reihe Wir bemerken, dass

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{10} - \frac{1}{12},$$

und so weiter. Das bedeutet, dass sich (P) als:

$$(\mathrm{P}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

schreiben lässt. Deshalb schliessen wir, dass:

$$(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}\sum_{n}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \frac{s}{2},$$

wobei s die Summe der unsprünglichen alternierenden harmonischen Reihe war.