**5.1. Potenzreihen** Wir bezeichnen mit $c_n$ den Koeffizient jeder Potenzreihe.

**(a)** Es gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2,$$

also ist der Konvergenzradius $\rho = 2$ und die Reihe ist für $|x| < 2$ absolut konvergent und für $|x| > 2$ divergent. Falls $x = -2$. ist die Reihe die alternierende harmonische Reihe, also "bedingt" (d.h. nicht absolut) konvergent. Falls $x = 2$, ist die Reihe die harmonische Reihe, also divergent.

*Zusammenfassend:* der Konvergenzradius ist $\rho = 2$, also ist die Reihe absolut konvergent für $|x| < 2$ und konvergent für $x = -2$, divergent sonst.

**(b)** Es gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}},$$

also ist der Grenzwert 1 mit Satz 3.3.2. Damit ist der Konvergenzradius $\rho = 1$. Falls $|x - \pi| = 1$, d.h. $x = \pi - 1$ oder $x = -\pi + 1$, sind die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

beide absolut konvergent.

*Zusammenfassend:* Der Konvergenzradius ist $\rho = 1$ und die Reihe ist absolut konvergent für $|x - \pi| \leq 1$, divergent sonst.

**(c)** Hier benutzen wir lieber das Quotientenkriterium. Es gilt:

$$\frac{|c_{n+1}||x|^{2(n+1)}}{|c_n||x|^{2n}} = \frac{(2n)!}{(2(n+1))!}|x|^2 = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Für jedes feste $x$, ist für $n \to \infty$ der Grenzwert dieses Ausdrucks 0, also ist die Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$. Der Konvergenzradius ist dann $\rho = +\infty$.

*Zusammenfassend:* Der Konvergenzradius ist $\rho = +\infty$, also ist die Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$.

**(d)** Wir benutzen das Quotientenkriterium. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x+2|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{|x+2|^n} = \lim_{n\to\infty} |x+2| \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+2|,$$

also ist die Reihe für $|x+2| < 1$ absolut konvergent und für $|x+2| > 1$ divergent. Das liefert, dass der Konvergenzradius $\rho = 1$ ist. Falls $|x+2| = 1$, haben wir 2 Fälle: wenn $x = -1$, ist die Reihe $\sum_n 1/\sqrt{n}$, also divergent; wenn $x = -3$, ist die Reihe $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$, also bedingt konvergent.

*Zusammenfassend:* Der Konvergenzradius ist $\rho = 1$, also ist die Reihe absolut konvergent für $|x+2| < 1$ und konvergent für $x = -3$, divergent sonst.

**5.2. MC Frage: Konvergenzradius** Sei $R_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho_1 > 0$. Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$R_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Dann:

- ☐ haben $R_1$ und $R_2$ den gleichen Konvergenzradius;
- ☐ ist der Konvergenzradius von $R_2$ strikt kleiner als $\rho$;
- ☐ Zu wenig Informationen: keine der Aussagen trifft zu.

Die einzige richtige Antwort ist die erste. Der Konvergenzradius von $R_1$ ist nach Definition

$$\rho_1 = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}},$$

also, weil wie bekannt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, ist die Konvergenzradius von $R_2$

$$\begin{aligned}\rho_2 = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n|c_{n-1}|}} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|c_{n-1}|}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_{n-1}|}} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \rho_1.\end{aligned}$$

**5.3. Grenzwerte von Funktionen**

**(a)** Es gilt:

$$\frac{4x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x(4-1/x)}{|x|\sqrt{1-1/x^2}};$$

weil $x$ nach $-\infty$ strebt, können wir annehmen, das $x<0$, also:

$$\frac{x(4-1/x)}{|x|\sqrt{1-1/x^2}} = -\frac{x(4-1/x)}{x\sqrt{1-1/x^2}} = -\frac{(4-1/x)}{\sqrt{1-1/x^2}},$$

also schliessen wir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{(4-1/x)}{\sqrt{1-1/x^2}} = -4.$$

**(b)** Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}\right) &= \frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \frac{x^2-4}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)},\end{aligned}$$

also

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{1}{3}.$$

**(c)** Der Zähler ist konstant und positiv, also

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{3}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{3}{x-4} = +\infty.$$

**(d)** Für jedes $x<0$ gilt $|x|/x = -x/x = -1$, und für jedes $x>0$ gilt $|x|/x = +x/x = 1$, also

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Wir folgern dass $\lim_{x\to 0} |x|/x$ nicht existiert, weil der rechtsseitige Grenzwert und der linksseitige Grenzwert verschiedene Werte haben.

*Grenzwert mit Parametern:* Es gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2-7x+1}-(\beta x+\gamma) &= (\sqrt{2x^2-7x+1}-(\beta x+\gamma))\frac{\sqrt{2x^2-7x+1}+(\beta x+\gamma)}{\sqrt{2x^2-7x+1}+(\beta x+\gamma)} \\ &= \frac{2x^2-7x+1-(\beta x+\gamma)^2}{\sqrt{2x^2-7x+1}+(\beta x+\gamma)} \\ &= \frac{(2-\beta^2)x^2+(-7-2\beta\gamma)x+1-\gamma^2}{\sqrt{2x^2-7x+1}+(\beta x+\gamma)}.\end{aligned}$$

Damit der Grenzwert endlich ist, muss $2-\beta^2=0$ sein, d.h. $\beta=\sqrt{2}$ oder $\beta=-\sqrt{2}$. Falls $\beta=-\sqrt{2}$, ist der Grenzwert des Nenners gleich 0, somit divergiert der Grenzwert des Bruchteils. Für $\beta=\sqrt{2}$ erhalten wir wie in (a) und (b):

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2-7x+1}-(\sqrt{2}x+\gamma)) = \frac{-7-2\sqrt{2}\gamma}{2\sqrt{2}}.$$

Damit

$$\frac{-7-2\sqrt{2}\gamma}{2\sqrt{2}} = 0$$

ist, muss $\gamma=-\frac{7}{2\sqrt{2}}$ sein. Alles in allem, ist der Grenzwert Null falls

$$(\beta,\gamma)=\left(\sqrt{2},-\frac{7}{2\sqrt{2}}\right).$$

### 5.4. Eigenshaften der reellen Exponentialfunktion

**(a)** Aus der Definition folgt

$$\operatorname{Exp}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\underbrace{1+x}_{>1}+\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}_{\geq 0}>1.$$

**(b)** Ein Weg verwendet das Additionstheorem: wenn $y>x$, existiert $\epsilon>0$ so dass $y=x+\epsilon$, also

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}(y)-\operatorname{Exp}(x) &= \operatorname{Exp}(x+\epsilon)-\operatorname{Exp}(x) \\ &= \operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(\epsilon)-\operatorname{Exp}(x) \\ &= \operatorname{Exp}(x)(\operatorname{Exp}(\epsilon)-1).\end{aligned}$$

In (a) wurde gezeigt, dass weil $\epsilon>0$, ist $\operatorname{Exp}(\epsilon)>1$, also $\operatorname{Exp}(x)(\operatorname{Exp}(\epsilon)-1)>0$, d.h. $\operatorname{Exp}(y)>\operatorname{Exp}(x)$.

**(c)** Wir wissen, dass falls $n \in \mathbb{Z}$, ist $\operatorname{Exp}(n) = \mathrm{e}^n$, und weil $\mathrm{e} > 1$, gilt

$$\lim_{n\to-\infty} \mathrm{e}^n = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty.$$

Aus (b) wissen wir, dass Exp wachsend ist, also ist nötig dass

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

**5.5. MC Frage: die Komplexe Exponentialfunktion** Betrachten Sie $z \mapsto \operatorname{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann

☐ falls $z$ reell ist, ist $\operatorname{Exp}(z)$ reell.

*Richtig:* Das ist weil jede Glied der Reihe Reell ist, also ist die Summe reell.

☐ falls $z$ rein imaginär ist, d.h. $z = iy$ für $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, ist $\operatorname{Exp}(z)$ immer rein imaginär;

*Falsch:* z.B. falls $z = i\pi/4$, aus der Formel $\operatorname{Exp}(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ gilt $\operatorname{Exp}(i\pi/4) = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$.

☐ falls $z = x + iy$ mit $y \neq 0$, muss $\operatorname{Exp}(z)$ immer nichtverschwindenden imaginäre Teil haben;

*Falsch:* Falls $y = \pi$, aus der Formel $\operatorname{Exp}(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, erhalten wir $\operatorname{Exp}(i\pi) = -1$.

☐ ist Exp surjektiv, d.h. für jedes $w \in \mathbb{C}$ existiert $z \in \mathbb{C}$ so dass $\operatorname{Exp}(z) = w$;

*Falsch:* Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt immer $\operatorname{Exp}(z) \neq 0$.

☐ ist Exp injektiv, d.h. falls $\operatorname{Exp}(z_1) = \operatorname{Exp}(z_2)$, folgt $z_1 = z_2$.

*Falsch:* z.B. aus der Formel $\operatorname{Exp}(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ erhalten wir, dass $\operatorname{Exp}(0) = \operatorname{Exp}(2\pi i) = 1$.