6.1. MC Fragen: Grenzwert einer Funktion

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1$. Dann

☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass, falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;

Falsch: ein Gegenbeispiel ist gegeben durch die konstante Funktion $f(x) \equiv 2$ und $\epsilon = 3$.

☐ existieren $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, so dass $|f(x_n) - 1| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

Richtig: der Satz besagt, dass eine Folge $(x_n)_n$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$. Die Definition von Grenzwert mit Folgen lautet:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \iff \text{ für jede Folge } (x_n)_x \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1,$$

also ist ihre Negation:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1 \iff \text{es existiert eine Folge } (x_n)_x \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ s.d. } \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1.$$

☐ für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq 1$.

Falsch: ein Gegenbeispiel ist gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

weil für jede Folge rationaler Zahlen $(x_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, aber bekanntlich existiert $\lim_{x\to 1} f(x)$ nicht.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x\to 2} f(x) = \pi$?

☐ $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$;

Richtig: Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist an der Stelle 2 beschränkt und stetig, also existiert $\lim_{x\to 2} f(x)/x$ genau dann, wenn $\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert, und muss

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{2}$$

sein.

☐ Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\overline{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \overline{n}$;

☐ $\lim_{n\to\infty} f(2 - 1/n) = \pi$.

Beide sind falsch: das meint nur, dass für die Folge $x_n = 2 - 1/n$ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt; die Definition von Grenzwert mit Folgen erfordert, dass für jede Folge $(x_n)_n$, die Grenzwert 2 hat, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \pi$ gilt.

6.2. Wichtige Grenzwerte Wir benutzen die Tatsache (siehe 4.8.1), dass eine Potenzreihe $\sum_n c_n z^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ (möglich $+\infty$), eine stetige Funktion definiert im Innern des Konvergenzkreises.

(a) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\sin x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für $x \neq 0$ fixiert sehen wir, dass

$$\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Durch das Quotientenkriterium sehen wir, dass diese Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ (oder $x \in \mathbb{C}$) absolut konvergent ist:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{(2k+3)(2k+2)} = 0,$$

und ihr Wert in $x = 0$ ist 1. Daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1.$$

(b) Wie in der Vorlesung gesehen, hat $\cos x$ die folgende Potenzreihendarstellung:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für $x \neq 0$ fixiert, sehen wir, wie in (a), dass

$$\frac{1}{x} \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist mit Wert 0, daraus schliessen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

(c) Genau wie in (b) erhalten wir, dass für $x \neq 0$ fixiert gilt

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-2}}{2k!},$$

wobei die Reihe absolut konvergent auf ganz $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) ist. Ihr Wert in $x = 0$ ist $1/2$, also

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(d) Mit (a) erhalten wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{x} = \lim_{x\to} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \right) = 1.$$

(e) Wie in (a), aus der Potenzreihendarstellung

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

für $x \neq 0$ erhalten wir, dass

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!},$$

und der Wert dieser absolut konvergenten Reihe an der Stelle 0 ist 1, also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

6.3. Definition von Stetigkeit

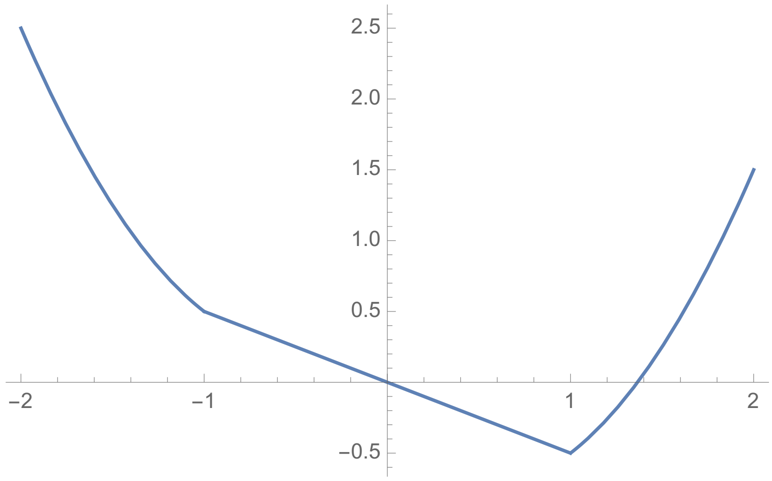
(a) *Die Funktionen $x \mapsto x^2 - \alpha x + \beta$, $x \mapsto x^2 + \alpha x - \beta$ und $x \mapsto (\alpha+\beta)x$ sind stetig.* Darum ist die Funktion f stetig ausserhalb der Punkte ± 1, und sie besitzt am Punkt $+1$ einen linksstetigen Grenzwert und am Punkt -1 einen rechtsstetigen Grenzwert. Damit sie an diesen Stellen stetig ist, muss noch gelten:

$$1 + \alpha + \beta \;=\; f(-1) \;\overset{!}{=}\; \lim_{x\to -1+} f(x) \;=\; \lim_{x\to -1+} (\alpha+\beta)x \;=\; -(\alpha+\beta),$$

und

$$1 + \alpha - \beta \;=\; f(1) \;\overset{!}{=}\; \lim_{x\to 1-} f(x) \;=\; \lim_{x\to 1-} (\alpha+\beta)x \;=\; \alpha+\beta.$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $\beta = \frac{1}{2}$, und nach Einsetzen dieses Wertes ist die erste Gleichung äquivalent zu $\alpha = -1$. Wir schliessen, dass f stetig auf ganze $\mathbb{R}$ ist genau dann wenn $\alpha = -1$ und $\beta = 1/2$. Der Graph von f ist dann:



(b) Wie in (a), *g ist stetig ausser in dem Punkten 0 und 1.* Wir sehen dann, dass

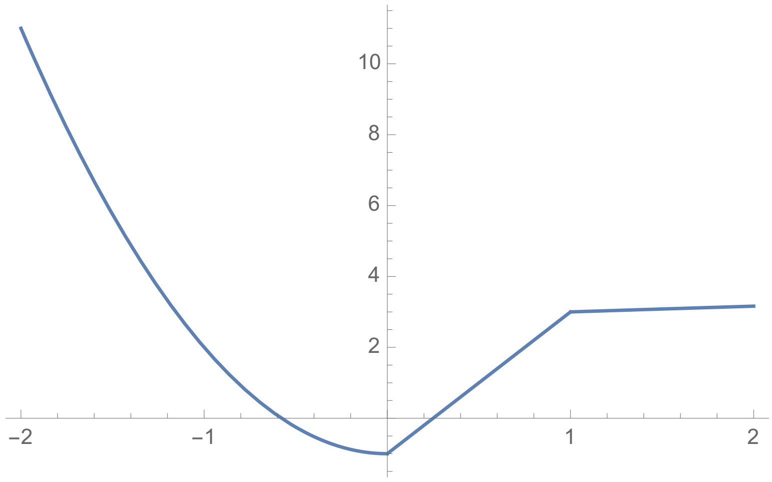
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = d = f(0),$$

und

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = c + d, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 3,$$

damit ist g auch an diesen Stellen stetig (insbesondere auf ganz $\mathbb{R}$) genau dann wenn $d = -1$ und $c = 4$.

Der Graph von f ist dann:



(c) Falls $x_0 \neq 1/2$, existiert $\lim_{x\to x_0} h(x)$ nicht, zum Beispiel weil für jede Folge rationale Zahlen $(x_n)_n$ mit Grenzwert x_0, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

und für jede Folge nichtrationales Zahlen $(x_n)_n$ mit Grenzwert x_0 gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(1-x_n) = 1-x_0,$$

und diese Werte sind verschieden. Aber wenn $x_0 = 1/2$ ist h stetig: für jede Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert $1/2$ sehen wir, dass

$$|f(x_n) - 1/2| = \begin{cases} |x_n - 1/2| & \text{falls } x_n \in \mathbb{Q}, \\ |1 - x_n - 1/2| = |x_n - 1/2| & \text{sonst,} \end{cases}$$

also für jedes $\epsilon > 0$ nehmen wir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - 1/2| < \epsilon$ (das existiert, weil $(x_n)_n$ Grenzwert $1/2$ hat!): das liefert

$$|f(x_n) - 1/2| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\epsilon.$$

wie gewollt.

6.4. Zwischenwertsatz

(a) Zu zeigen: Die Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ist bijektiv.

Wir wissen: Ein mit stetigen Funktionen gebildeter rationaler Ausdruck ist, soweit definiert, wieder stetig. Darum ist die Funktion $f(x)$ auf $(-1,1)$ stetig. Als nächstes beachte, dass gilt:

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1-} f(x) = +\infty,$$

denn in beiden Grenzwerten geht der Nenner $\sqrt{1-x^2}$ von oben gegen Null und der Zähler gegen -1, bzw. gegen 1. Insbesondere nimmt f für jede gegebene Zahl c sowohl Werte $> c$ als auch Werte $< c$ an. Aus der Stetigkeit und dem Zwischenwertsatz folgt daraus, dass f auch den Wert c selbst annimmt. Somit nimmt f jedes $c \in \mathbb{R}$ als Wert an, das heisst, f ist surjektiv.

Andererseits gilt

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}$$

für $0 < x < 1$. In diesem Bereich ist die Funktion
$x \mapsto x^2$ streng monoton wachsend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$ streng monoton fallend
$\Rightarrow$ für $0 < x < 1$ ist $x \mapsto f(x)$ streng monoton wachsend.
Ausserdem gilt in diesem Bereich $f(x) > 0 = f(0)$. Somit ist f streng monoton

wachsend für $0 \leq x < 1$. Wegen $f(-x) = -f(x)$ folgt, dass f auch auf dem Bereich $-1 < x \leq 0$ streng monoton wachsend ist. Also ist f insgesamt streng monoton wachsend und daher injektiv.

Somit ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

(b) Betrachten Sie die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$. Es gilt

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 0,$$

d.h. ein Punkt x is genau dann ein Fixpunkt von f wenn er eine Nullstelle von g ist.
Wir müssen daher zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ besitzt.
Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist g stetig.
Weil ausserdem $f(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, ist

$$g(0) \geq 0 \geq g(1),$$

denn $g(0) = f(0) - 0 \geq 0 - 0 = 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$.
Da g stetig ist, gibt es daher nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$ und somit $f(x) = x$.

(c) Betrachte die stetige Funktion $g : [0, \frac{n-1}{n}] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{n})$. Wir müssen daher zeigen, dass g immer eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ besitzt. Wir zeigen diese Behauptung indirekt.
Nehmen wir an, dass $g(x) > 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x + \frac{1}{n}) < f(x) \qquad \text{für alle } x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ und wenden wir die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) > f(\frac{1}{n}) > f(\frac{2}{n}) > \cdots > f(\frac{n-1}{n}) > f(1) = 0 \ ,$$

das zu einen Widerspruch führt.
Analog falls $g(x) < 0$ für alle $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$. Dann gilt:

$$f(x) < f(x + \frac{1}{n}) \qquad \text{für alle } x \in [0, \frac{n-1}{n}].$$

Wählen wir sukzessiv $x = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$ und wenden wir die letzte Ungleichung an. Damit gilt:

$$0 = f(0) < f(\frac{1}{n}) < f(\frac{2}{n}) < \cdots < f(\frac{n-1}{n}) < f(1) = 0 \ ,$$

das zu einen Widerspruch führt.
Somit besitzt g eine Nullstelle auf dem Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das impliziert unsere Behauptung.