7.1. Grenzwerte und Variablenwechsel

(a) Mit dem Variablenwechsel $y = -x$ sehen wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(1-x)}{-x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\log(1+y)}{y} = -1.$$

(b) Mit den Eigenschaften des Logarithmus erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}\log(1-\cos x) &= \log\left(\frac{1-\cos x}{x^2} x^2\right)\\ &= \log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) + \log(x^2)\\ &= \log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) + 2\log(x),\end{aligned}$$

also

$$\frac{\log(1-\cos x)}{\log x} = \frac{1}{\log x}\log\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) + 2.$$

Bekanntlich gilt $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ und $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$, daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\cos x)}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log x}\log\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 2.$$

(c) Wir multiplizieren und teilen durch x und sehen, dass für $x \to 0^+$ gilt

$$\log x \log(1-x) = \underbrace{x\log x}_{(i)} \underbrace{\frac{\log(1-x)}{x}}_{(ii)}.$$

Bekanntlich strebt (i) gegen 0 und aus (a) erhalten wir, dass der Grenzwert von (ii) gleich -1 ist. Daraus schliessen wir, dass $\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x) = 0$.

(d) Mit dem Variablenwechsel $t = \log x$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 1^+} \log x \log(\log x) = \lim_{t\to 0^+} t\log t = 0.$$

(e) Aus der Definition von $\tan x$ folgt:

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{(i)} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{(ii)} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{(iii)},$$

Bekanntlich streben für $x \to 0$ (i) and (ii) gegen 1 und (iii) gegen 1/2. Alles in allem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

(f) Mit dem Variablenwechsel $y = ax$ erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{y\to 0} a\frac{\sin(y)}{y} = a.$$

(g) Wir behaupten, dass der Grenzwert nicht existiert. Dazu betrachten wir die Folgen

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{und} \quad y_n = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beide Folgen streben für $n \to \infty$ gegen $+\infty$. Wir sehen, dass

$$\mathrm{e}^{x_n} \sin(\mathrm{e}^{-x_n} \cos x_n) = 0 \quad \text{für alle } n,$$

und

$$\mathrm{e}^{y_n} \sin(\mathrm{e}^{-y_n} \cos y_n) = \mathrm{e}^{y_n} \sin(\mathrm{e}^{-y_n}) = \frac{\sin(\mathrm{e}^{-y_n})}{\mathrm{e}^{-y_n}};$$

Mit einem Variablenwechsel $z_n = \mathrm{e}^{-y_n}$ sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\mathrm{e}^{-y_n})}{\mathrm{e}^{-y_n}} = 1$ gilt. Das impliziert (vgl. die Definition von Grenzwert mit Folgen), dass der Grenzwert $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^{-x} \cos x)$ nicht existiert.

(h) Wir sehen, dass

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{1/4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}}{x^{1/4}} = \sqrt{1+\sqrt{x}},$$

also

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{1/4}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\sqrt{x}} = 1.$$

7.2. MC Fragen: Stetigkeit

(a) Die Aussage ist falsch. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$. Sie ist stetig und monoton steigend, aber $f([0,1] \cup [2,3])$ nimmt nicht alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(3)$ an. Dies folgt zum Beispiel aus der Beobachtung dass $f([0,1] \cup [2,3]) = f([0,1]) \cup f([2,3]) = [f(0), f(1)] \cup [f(2), f(3)]$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion mit $f(a) = (x_0, y_0)$, $f(b) = (x_1, y_1)$, wobei $x_0, y_0 \le 0 \le x_1, y_1$ gelte. Dann besitzt f eine Nullstelle in $[a,b]$, d.h. es gibt ein $t \in [a,b]$ mit $f(t) = (0,0)$.

Falsch: wenn wir $f = (f_1, f_2)$ schreiben mit stetigen Funktionen $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, dann garantiert der übliche Zwischenwertsatz die Existenz einer Stelle $s \in [a, b]$ mit $f_1(s) = 0$ und einer Stelle $t \in [a, b]$ mit $f_2(t) = 0$, aber es gibt keinen Grund, weshalb $s = t$ sein sollte. Ein konkretes Gegenbeispiel:

$$f : [-3\pi/4, \pi/4],\ \varphi \mapsto (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Falsch: ein Gegenbeispiel zur Gültigkeit der Aussage liefert die Einschränkung von sin auf das Intervall $[0, 3\pi]$.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a, b]$ genau eine Nullstelle.

Falsch: die konstante Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$, ist ein Gegenbeispiel.

☐ Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a, b) genau eine Nullstelle.

Richtig: der Zwischenwertsatz garantiert die Existenz einer Nullstelle, und aufgrund der strengen Monotonie kann es höchstens eine geben.

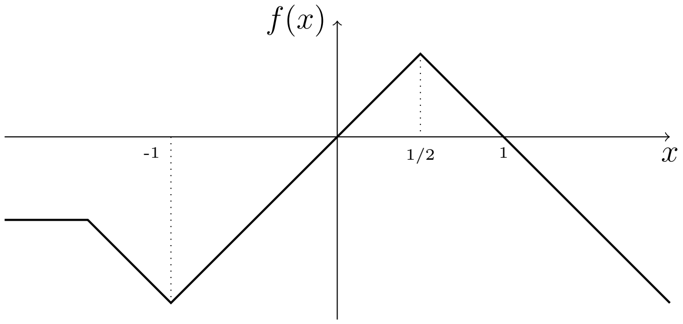
(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur an den Punkten 0 und 1 verschwindet. Dann:

☐ ist f monoton in $]-\infty, 0]$;

Falsch: Gegenbeispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{falls } x \leq -3/2, \\ -2 - x & \text{falls } -3/2 \leq x \leq 1, \\ x & \text{falls } -1 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{falls } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Der Graph von f ist:



☐ ist es möglich, dass f in $(1, +\infty)$ ihr Vorzeichen ändert;

Falsch: Falls $x, y \in]1, +\infty]$ existieren, so dass $f(x) > 0$ und $f(y) < 0$ gilt, muss nach dem Zwischenwertsatz ein $z \in (x, y)$ existieren, so dass $f(z) = 0$ gilt. Das widerspricht dert Tatsache, dass f nur in 0 und 1 verschwindet.

☐ das Vorzeichen von f ist konstant in $]1, \infty[$.

Richtig: das folgt aus der oben Begründung.

7.3. Lipschtizstetigkeit Sei $x_0 \in \Omega$ und sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_k = x_0$. Da f Lipschitz-stetig ist, gilt

$$|f(x_k) - f(x_0)| \leq L|x_k - x_0| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Also ist es notwendig, dass $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$. Das bedeutet, dass f stetig an der Stelle $x_0 \in \Omega$ ist.

7.4. Folgen von Funktionen Eine Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls für jedes $x \in I$ die (Zahlen-)Folge $f_n(x)$ gegen den Wert $f(x)$ konvergiert, d.h. $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ für jedes $x \in I$.
Eine Funktionenfolge f_n konvergiert gleichmässig gegen eine Grenzfunktion f auf einem Intervall I, falls

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

(a) Wir behaupten, dass $f_n(x)$ gleichmässig (und insbesondere auch punktweise) gegen $f(x) \equiv 1$ auf $[0, 1]$ konvergiert. Tatsächlich gilt für alle $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left|(1 + \frac{x}{n})^2 - 1\right| = \left|1 + 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} - 1\right| \\ &= 2\frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

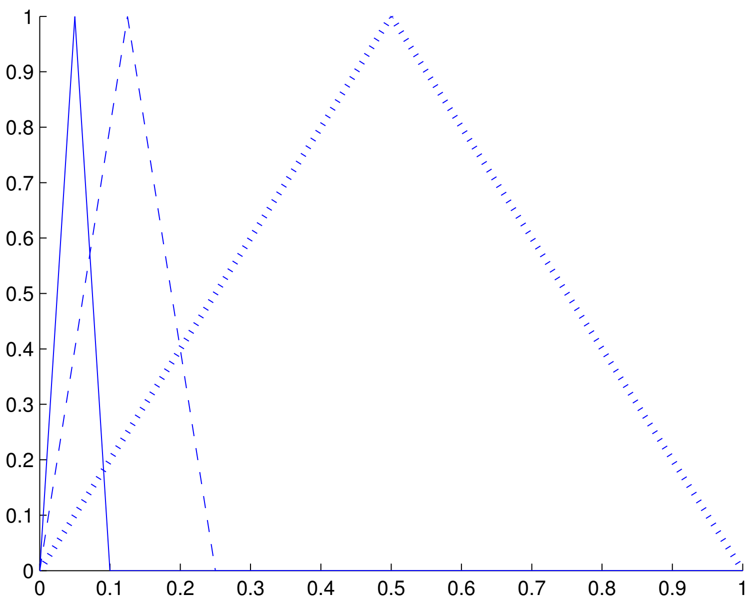
was die gleichmässige und damit auch die punktweise Konvergenz zeigt.

(b) $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0$. Tatsächlich, sei $x \in [0,1]$. Falls $x = 0$ ist, gilt $f_n(x) = 0$ für jedes x und somit sicher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Für $x > 0$ wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x > \frac{1}{n_0}$. Dann gilt insbesondere $x > \frac{1}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Also ist $f_n(x) = 0$ für $n \geq n_0$ und damit sicher $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Wir behaupten, dass $f_n(x)$ gleichmässig gegen $f(x) \equiv 0$ nicht konvergiert. Es gilt für jedes n, dass $f_n(\frac{1}{2n}) = 1$ ist und damit ist $f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n}) = 1$.
Damit gilt aber auch

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = 1 \nrightarrow 0$$

und die Folge konvergiert nicht gleichmässig.



Graphen der Funktionen f_1, f_4 und f_{10}

7.5. Eine Funkionenreihe

(a) Es immer gilt für jedes $y \in \mathbb{R}$ $|\langle y \rangle| < 1$, also

$$\frac{|\langle 10^k x\rangle|}{10^k} \leq \frac{1}{10^k} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\langle 10^k x\rangle|}{10^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} < +\infty,$$

damit ist die Reihe absolut konvergent auf $\mathbb{R}$.

(b) Um gleichmässige Konvergenz zu beweisen, beobachten wir, dass *für jedes* $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Somit $\lim_{x\to\infty} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

(c) Stetigkeit von f folgt sofort aus Satz 4.8.1.