8.1. Berechnung von Ableitungen Wir nennen jedes Mal f die bedachte Funktion.

(a) Wir führen die Aufteilung aus:

$$f(x) = \frac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4} = 3x^3 + x - 2 + x^{-3} - 3x^{-4};$$

die Ableitung Potenzfunktionen liefert:

$$f'(x) = 9x^2 + 1 - 2 - 3x^{-4} + 12x^{-5} = \frac{9x^7 + x^5 - 3x + 12}{x^5}.$$

(b) Wir sehen, dass

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x+5)(x+7)} = \frac{x^2(x+5)^2}{(x+5)(x+7)} = \frac{x^2(x+5)}{x+7};$$

die Quotierenregel liefert:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 10x)(x+7) - x^3 - 5x^2}{(x+7)^2} = \frac{2x^3 + 26x^2 + 70x}{(x+7)^2}.$$

(c) Die Ableitungsregeln (Quotient, Ableitung von $\operatorname{Exp}, \log, \sin$) liefern:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x(x(x+2) + 2) - \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x) + 1}.$$

(d) Die Ableitungsregeln liefern:

$$f'(x) = -\frac{x \sin(\sin(x^2)) \cos(x^2)}{\sqrt{\cos(\sin(x^2)) + 1}}.$$

(e) Nach Definition, gilt:

$$f(x) = 2^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \log 2},$$

somit ist die Ableitung

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\sin x \log 2} \cos x \log 2 = 2^{\sin x} \cos x \log 2.$$

8.2. Grenzwerte Wir nennen jedes Mal f und g die Funktionen in dem bedachten Grenzwert, d.h. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) Der Grenzwert hat Ausdruck $\frac{0}{0}$. Es gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1,$$

somit existiert der Grenzwert und gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1.$$

(b) Hier kann man *nicht* die Regel von de l'Hôpital anwenden, weil f und g in 1 nicht verschwinden. Es ist aber ein einfacher Grenzwert, weil der Nenner nicht verschwindet:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x+1} = 0.$$

(c) Der Grenzwert hat Ausdruck $0\cdot\infty$. Mit den wichtigen Grenzwerten erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\log x = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\underbrace{x\log x}_{\to 0} = 0.$$

(d) Wir verwenden zweimal die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x} = 2.$$

(e) Hier kann man *nicht* de l'Hôpital benutzen: der Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{3+\sin x}$$

existiert nicht. Weil $|\sin x|\leq 1$, ist die Zähler beschräknt:

$$\log 2 \leq \log(3+\sin x) \leq \log 4,$$

somit

$$\frac{\log 2}{x} \leq \frac{\log(3+\sin x)}{x} \leq \frac{\log 4}{x},$$

also

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2}{x}}_{=0} \leq \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x} \leq \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log 4}{x}}_{=0}$$

danach $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x} = 0$.

(f) Es gilt, $x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \log x}$. Somit sehen wir, dass der Grenzwert Ausdruck $\frac{0}{0}$ hat. Mit der Regel von de l'Hôpital erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\sin x\log x}-1}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\mathrm{e}^{\sin x \log x}}_{\to 1}\Big(\underbrace{\cos x \log x}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big) = -\infty.$$

(g) Es gilt

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right);$$

wir berechnen den Grenzwert des Arguments mit der Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sin x}{2x} = 0.$$

Somit ist der Grenzwert gleich $\mathrm{e}^0 = 1$.

8.3. Mittelwertsatz

(a) f_1: Es gilt $f_1'(x) = 6x-5$ und es ist möglich, den Mittelwertsatz anzuwenden. Wir berechnen:

$$6c - 5 = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = 16,$$

somit erhalten wir, dass der (einzige) untersuchte Punkt $c = 7/2$ ist.

f_2: die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x-4}$ ist differenzierbar und verschwindet nicht in [1,3], damit ist f_2 differenzierbar mit

$$f_2'(x) = \frac{(x-4)-(x+3)}{(x-4)^2} = -\frac{7}{(x-4)^2}.$$

Wir berechnen:

$$-\frac{7}{(c-4)^2} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = -\frac{7}{3}$$

Somit muss $(c-4)^2 = 3$ sein. Die Lösungen dieser Gleichung sind $c = 4 \pm \sqrt{3}$, aber nur $4-\sqrt{3}$ liegt in $[1,3]$. Somit ist $c = 4-\sqrt{3}$ der einzige gesuchte Punkt.

f_3: da $25 - x^2 > 0$ in $[-3,4]$, ist f_3 differenzierbar in $[-3,4]$ mit

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}.$$

Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
-\frac{c}{\sqrt{25-c^2}} &= \frac{f(4)-f(-3)}{4-(-3)} = -\frac{1}{7} \\
&\Rightarrow 7c = \sqrt{25-c^2} \\
&\Rightarrow 49c^2 = 25-c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Beide Lösungen $c = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ dieser Gleichung liegen in $[-3,4]$ und sind somit die gesuchten Punkte.

(b) Wir müssen zeigen, dass für $x > 0$ gilt:

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

Wir betrachten dazu die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$. Dann ist f differenzierbar für $x > -1$ und es gilt $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}$.
Ausserdem ist $f(0) = 1$.
Also gilt nach dem Mittelwertsatz, dass für jedes $x > 0$ ein $u \in (0,x)$ existiert mit

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(u) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{u+1}} < \frac{1}{2}, \qquad \text{da } u > 0.$$

Also gilt $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ wie behauptet.

(c) *Behauptung 1:* Es gilt $\log(x) \leq x-1$ für alle $x > 0$.

Wir wenden den Mittelwertsatz auf $f(x) = \log(x)$ an. Wir machen folgende Fallunterscheidungen:

<u>1. Fall: $0 < x < 1$.</u> Es gilt für $0 < x < 1$:

$$\log(x) \leq x-1 \iff \frac{\log(x)}{x-1} \geq 1.$$

(Achtung, wir dividieren durch eine negative Zahl, daher "wechselt" die Ungleichung.)
Weil $\log(1) = 0$, gilt nach dem Mittelwertsatz, dass ein $u \in (x,1)$ existiert mit

$$\frac{\log(x)}{x-1} = \frac{\log(x)-\log(1)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(u) = \frac{1}{u}.$$

Weil aber $u \in (x,1)$ ist, gilt $\frac{1}{u} > 1$, also gilt die Ungleichung in diesem Fall. Das heisst, es folgt $\log(x) \leq x-1$ für $0 < x < 1$.

<u>2. Fall: $x = 1$.</u> Es gilt $\log(1) = 0 = 1-1$, d.h. die Ungleichung gilt für $x = 1$.

<u>3. Fall: $x > 1$.</u> Hier gilt

$$\log(x) \leq x - 1 \Leftrightarrow \frac{\log(x)}{x-1} \leq 1,$$

Nun gilt nach dem Mittelwertsatz, dass ein $u \in (1, x)$ existiert mit

$$\frac{\log(x)}{x-1} = \frac{\log(x) - \log(1)}{x-1} = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(u) = \frac{1}{u}.$$

Weil aber $u > 1$ gilt $\frac{1}{u} < 1$, also stimmt die Ungleichung auch in diesem Fall.
Dies zeigt Behauptung 1.

Behauptung 2: Es gilt $1 - \frac{1}{x} \leq \log(x)$ für alle $x > 0$.
Sei $x > 0$. Wir wenden Behauptung 1 für $y = \frac{1}{x}$ an.
Damit erhalten wir

$$-\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) = \log(y) \overset{\text{Beh.1}}{\leq} y - 1 = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \log(x) \geq 1 - \frac{1}{x},$$

wie behauptet.

8.4. MC Fragen: Differenzierbare Funktionen

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

- ☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.

Nur

- ☐ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$

ist korrekt. Nach dem Mittelwertsatz (oder dem Satz von Rolle) liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle von f'. Daher hat f' mindestens zwei Nullstellen. Im Fall $f(x) = 0$ ist auch f' identisch gleich 0; also sind

- ☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

falsch. Ein Beispiel wie $f(x) = x^3 - 3x$ mit $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ zeigt, dass die Anzahl der Nullstellen von f' gleich 2 sein kann. Also ist

☐ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$;

die einzige richtige Antwort.

(b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1-x}{x+3}$. Dann gilt:

☐ Die Funktion f ist auf $(-\infty, -3)$ streng monoton fallend.

☐ Die Funktion f ist auf $(-3, \infty)$ streng monoton fallend.

☐ Die Funktion f nimmt auf $(-\infty, -3)$ nur negative Werte an.

☐ Die Funktion f nimmt auf $(-3, \infty)$ nur positive Werte an.

☐ Keine Aussage ist korrekt.

Die richtige Antworten sind:

☐ Die Funktion f ist auf $(-\infty, -3)$ streng monoton fallend.

☐ Die Funktion f ist auf $(-3, \infty)$ streng monoton fallend.

☐ Die Funktion f nimmt auf $(-\infty, -3)$ nur negative Werte an.

Nach dem Mittelwertsatz ist f auf $(-\infty, -3)$ monoton fallend falls dort $f'(x) \leq 0$ gilt. Durch Berechnen von $f'(x)$ und Vereinfachen von der Ungleichung $f'(x) \leq 0$ (unter Verwendung umkehrbarer Umformungen und der notwendigen Fallunterscheidungen abhängig vom Nenner) erhält man den ersten Satz. Die zweiten und dritten Sätzen folgen auf die gleiche Weise.

8.5. Umkehrsatz

(a) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f'(x) = 1 + \mathrm{e}^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, somit ist f streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$ und umkehrbar. Dazu gilt

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

somit ist f bijektiv von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{R}$. Weil

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 1,$$

mit dem Kettenregel erhalten wir:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2},$$

und

$$(f^{-1})''(1) = \left(\frac{1}{f' \circ f^{-1}}\right)'(1) = -\frac{(f' \circ f^{-1})'(1)}{[(f' \circ f^{-1})(1)]^2} = -\frac{f''(0)(f^{-1})'(1)}{(f'(0))^2}$$
$$= -\frac{1/2}{4} = -\frac{1}{8}.$$

(b) Wir definieren die Funktion $\phi(x) = (x-1)\mathrm{e}^x - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$: wir sehen, dass $\phi'(x) = x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, somit

$$\begin{aligned} &\phi'(x) < 0 \quad \text{in } (-\infty, 0) \Rightarrow \phi \text{ streng fallend in } (-\infty, 0) \text{ und} \\ &\phi'(x) > 0 \quad \text{in } (0, +\infty) \Rightarrow \phi \text{ streng wachsend in } (0, +\infty). \end{aligned}$$

Weil

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \phi(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \phi(0) = -2,$$

aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass genau zwei Punkten $x_1 \in (-\infty, 0)$ und $x_2 \in (0, +\infty)$ existieren, so dass $\phi(x_1) = 0$, $\phi(x_2) = 0$, d.h. die Gleichung hat genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

8.6. Graphen

(a) Die Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die wichtigen Grenzwerte sind

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$$

Das Vorzeichen von f ist wie folgt:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2},$$

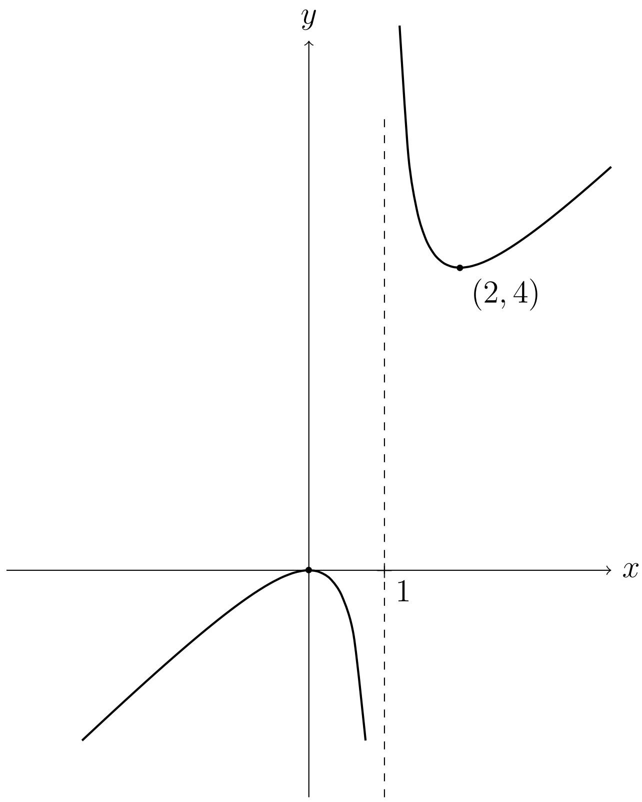
somit

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0,\ x \geq 2,$$

und die kritischen Punkte sind 0 und 2. Wir sehen, dass die zweite Ableitung von f

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

ist. Somit weil $f''(0) = -2 < 0$, muss $x = 0$ eine lokale Maximalstelle sein mit Wert 0, und weil $f''(2) = 2 > 0$ muss $x = 2$ eine lokale Minimalstelle sein mit Wert 4. *Zusammenfassend:* f ist von oben und unten unbeschräknt; 0 ist ein Maximalstelle mit Wert 0 und 2 ist eine lokale Minimalstelle mit Wert 4. Der Graph ist wie folgt:



(b) Die Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$. f ist periodisch mit Periode 2π, d.h. $f(x) = f(x+2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, somit ist es genug nur $x \in [0, 2\pi]$ zu betrachten. Vorzeichen:

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \geq -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \tan x \geq -\sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]. \end{aligned}$$

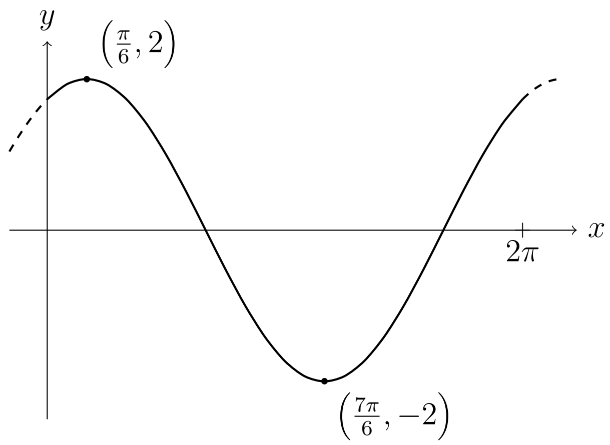
Die Ableitung ist $f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$, somit

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right]$$

Wir folgern, dass f in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, 2\pi\right]$ wachsend ist und dass die kritischen Punkte $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{7\pi}{6}$ sind. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$, damit sehen wir, dass

$$\begin{aligned} f''(\pi/6) &= -2 < 0 \Rightarrow \pi/6 \text{ lokale Maximalstelle, mit Wert } 2, \\ f''(7\pi/6) &= 2 > 0 \Rightarrow 7\pi/6 \text{ lokale Minimalstelle, mit Wert } -2. \end{aligned}$$

Zusammenfassend: f hat eine globale Maximalstelle in $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit wert 2 und globale Minimalstelle in $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ mit wert -2. Der Graph ist wie folgt:



(c) Die Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$. Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Vorzeichen:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Ableitung:

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}},$$

somit

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3},$$

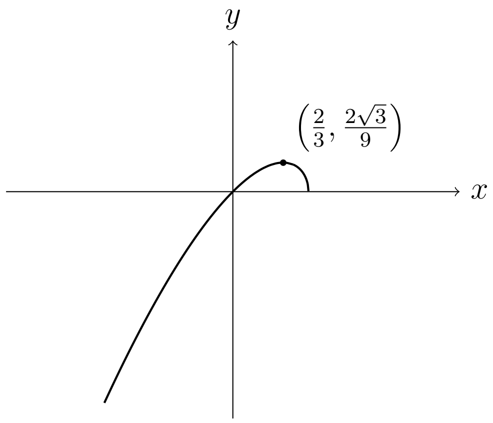
daraus folgern wir, dass f in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ wachsend und der einige kritische Punkt ist $x = \frac{2}{3}$ ist. Die zweite Abletiung ist

$$f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{x}{4(1-x)^{3/2}},$$

somit

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \frac{2}{3} \text{ lokale Maximalstelle, mit wert } \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Zusammenfassend: f is von unten unbeschränkt, und hat in $\frac{2}{3}$ eine global Maximalstelle mit Wert $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. Der Graph ist wie folgt:



(d) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad (\text{insb. ist } f \text{ in } 0 \text{ stetig}), \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Vorzeichen: f verschwindet in 0. Falls $x \neq 0$,

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log|x| \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq \mathrm{e}.$$

Ableitung: falls $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = x(2\log|x| - 1);$$

anhand dieses Ausdrucks sehen wir, dass $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, somit ist f auch in 0 differenzierbar. Wir sehen, dass für $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{\mathrm{e}} \leq x < 0 & \text{falls } x < 0, \\ x > \sqrt{\mathrm{e}} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

daraus folgern wir, dass f in $[-\sqrt{\mathrm{e}}, 0] \cup [\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty)$ wachsend ist und die kritischen Punkte $-\sqrt{\mathrm{e}}$, 0, $\sqrt{\mathrm{e}}$ sind. Die zweite Ableitung ist $f''(x) = 2\log|x| + 1$, somit

$$f''(-\sqrt{\mathrm{e}}) = f''(\sqrt{\mathrm{e}}) = 2 > 0 \Rightarrow \pm\sqrt{\mathrm{e}} \text{ lokale Minimalstelle, mit Wert } -\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

f ist nicht zwei Mal differenzierbar in 0 aber weil

$$f(0) = 0 \quad \text{und} \quad f(x) < 0 \quad \text{für} -\sqrt{e} \leq x \leq \sqrt{\mathrm{e}},$$

$x = 0$ muss eine lokale Maximalstelle mit Wert 0 sein. *Zusammenfassend:* f ist von oben unbeschränkt und hat in $\pm\sqrt{\mathrm{e}}$ globale Minimalstelle mit Wert $-\mathrm{e}/2$ und in 0 eine lokale Maximalstelle mit Wert 0. Der Graph ist wie folgt: