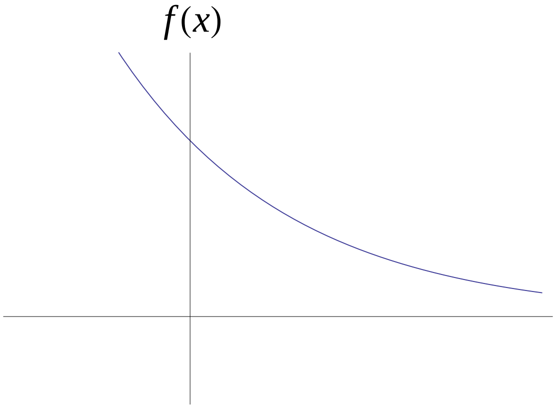
9.1. MC Fragen: Ableitungen

(a) Die Figur zeigt den Graphen einer zweimal differenzierbaren Funktion f. Was lässt sich über f, f' und f'' sagen?



- ☐ Nichts
- ☐ Die Funktion f ist positiv.
- ☐ Die Funktion f ist negativ.
- ☐ Die erste Ableitung f' ist positiv.
- ☐ Die erste Ableitung f' ist negativ
- ☐ Die zweite Ableitung f'' ist positiv.
- ☐ Die zweite Ableitung f'' ist negativ.

Die korrekte Aussage sind:

- ☐ Die Funktion f ist positiv.
- ☐ Die erste Ableitung f' ist positiv.
- ☐ Die zweite Ableitung f'' ist positiv.

Alle Funktionswerte sind sicher positiv, weil der Graph von f über der x-Achse liegt. In jedem Punkt ist die Steigung der jeweiligen Tangente negativ, also ist f' negativ. Die erste Ableitung ist nirgends konstant, d.h. die zweite Ableitung sicher ungleich Null. Der Graph beschreibt eine strikt konvexe Funktion, damit muss $f'' > 0$ sein.

(b) Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ monoton wachsend und differenzierbar. Dann gilt:

- ☐ $\frac{1}{f}$ ist monoton wachsend.
- ☐ $\frac{1}{f}$ ist monoton fallend.

☐ Keine Aussage gilt im Allgemeinen.

Nur die zweite Aussage ist korrekt: $\frac{1}{f}$ ist differenzierbar mit Ableitung $-\frac{f'}{f^2} \leqslant 0$. Also ist $\frac{1}{f}$ monoton fallend.

(c) Sei $f : (a, b) \longrightarrow I$ streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar. Dann gilt:

☐ f^{-1} ist monoton wachsend.

☐ f^{-1} ist monoton fallend.

☐ Keine Aussage gilt im Allgemeinen.

Nur die erste Aussage ist korrect: f^{-1} ist differenzierbar mit Ableitung $\frac{1}{f' \circ f^{-1}} \geqslant 0$. Also ist f^{-1} monoton wachsend.

9.2. Taylorpolynom Wir nennen jedes Mal f die bedachte Funktion. Das Taylorpolynom ist

$$P_4(f, x_0)(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4.$$

(a) Wir berechnen:

$$f'(x) = -(1 + x)^{-2}, \qquad f''(x) = 2(1 + x)^{-3},$$
$$f'''(x) = -6(1 + x)^{-4}, \qquad f^{(4)}(x) = 24(1 + x)^{-5},$$

somit an der Stelle $x_0 = 0$ erhalten wir:

$$P_4(f, 0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

(b) Nach Definition gilt

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{1}$$

somit erhalten wir:

$$\text{für jedes gerade } k, \quad \frac{d^k \cosh x}{dx^k} = \cosh x, \quad \frac{d^k \sinh x}{dx^k} = \sinh x,$$
$$\text{für jedes ungerade } k, \quad \frac{d^k \cosh x}{dx^k} = \sinh x. \quad \frac{d^k \sinh x}{dx^k} = \cosh x$$

Da $\sinh 0 = 0$ und $\cosh 0 = 1$ schliessen wir, dass

$$P_4(\cosh, 0)(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \quad \text{und} \quad P_4(\sinh, 0)(x) = x + \frac{x^3}{3!}.$$

(c) Wir können entweder die ersten vier Ableitungen berechnen, oder aber die Potenzreihenentwicklung von cos und e^x verwenden. Das Berechnen der Ableitungen ist v.a. für die höheren Ableitungen sehr aufwändig. Falls man dies trotzdem macht ergeben sich sehr lange Terme von denen fast alle in $x = 0$ Null sind und schliesslich ergibt sich:

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = -12$$

und man kann

$$P_4(f,0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4$$

berechnen. Besser benutzt man die Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt (beachte: für $x = 0$ ist $e^{x^2} - 1 = 0$, deshalb müssen wir auch den cos um Null entwickeln). Da wir nur das Taylorpolynom 4. Ordnung von f berechnen wollen, brauchen wir auch nur die Tayolorpolynome der Ordnung 4.
Es ist:

$$P_4(\cos(y),0)(x) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!}$$

und aus der Potenzreihenentwicklung von e^x erhalten wir

$$P_4(e^{x^2} - 1, 0)(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} - 1 = x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

Damit gilt

$$P_4(\cos(P_4(e^{x^2} - 1, 0), 0)(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{2}x^4)^2 + \frac{1}{4!} \cdot (x^2 + \frac{1}{2}x^4)^4 = 1 - \frac{1}{2}x^4$$
$$+ \text{Potenzen höherer Ordnung}$$

Also ist das Taylorpolynom 4. Ordnung

$$P_4(f,0)(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4.$$

(d) Wir erinnern uns die Identitäten $\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und

$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \log\cos x,\\
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \log\cos(\frac{\pi}{4}\Big) = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\log 2,\\
f'(x) &= \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x,\\
f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1,\\
f''(x) &= -(1+\tan^2(x)),\\
f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -(1+\tan^2(\pi/4)) = -2,\\
f'''(x) &= -2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = -2\tan(x) - 2\tan(x)^3,\\
f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4,\\
f^{(4)}(x) &= -2(1+\tan(x)^2) - 6\tan^2(x)(1+\tan^2(x)),\\
f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -4-12 = -16.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
P_4\left(f, \frac{\pi}{4}\right)(x) &= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) + -\frac{2}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{4}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{-16}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4\\
&= -\frac{1}{2}\log 2 - (x-\frac{\pi}{4}) - (x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^3 - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{4})^4.
\end{aligned}$$

9.3. Annäherung mit Taylor *Bemerkung:* Wenn man sagt, dass eine Approximation "exakt bis n Nachkommastellen ist", meint man, dass $n-1$ Nachkommastellen gewiss exakt sind. Die n-te Nachkommastelle könnte falsch sein!

(a) Die Funktion $x \mapsto \log(1+x)$ ist eine C^∞-Funktion (d.h. beliebig oft differenzierbar) in $(-1, +\infty)$, somit können wir für jedes n die Formel von Taylor n-ter Ordnung für $\log(1+x)$ an der Stelle 0 betrachten. Bekanntlich, oder durch direkte Berechnung, ist die Formel

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(0,x),$$

wo das Restglied gegeben ist durch

$$R_n(0,x) = (-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$$

für ein $\xi \in (0, x)$. In unserem Fall ist $x = 0.1$, und um 3 exakte Nachkommastellen zu erhalten, ist es notwendig, dass

$$|R_n(0, 0.1)| = \frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}10^{-(n+1)} < 0.0005 = \frac{10^{-3}}{2}.$$

Weil $\xi \in (0, 0.1)$, gilt $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} < 1$, somit

$$|R_{n+1}(0, 0.1)| < \frac{1}{n+1}10^{-n+1},$$

daraus folgt $n + 1 > 3$, somit $n \geq 3$. Wir erhalten die Annäherung

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\frac{1}{10^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{10^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{10^4} = \frac{11437}{120000} = 0.0953083.$$

Weil $0.0953083 + \frac{10^{-3}}{2} = 0.0958083$, gibt es keinen Übertrag in der Addition: das stellt sicher, dass die ersten 3 Nachkommastellen der obigen Annäherung exakt sind.

(b) Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist eine C^∞-Funktion in $(0, +\infty)$, somit können wir für jedes n die Formel von Taylor n-ter Ordnung für $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 64$ betrachten:

$$\begin{aligned} f(x) = f(64) + f'(64)(x-64) + \frac{f''(64)}{2!}(x-64)^2 + \dots \\ + \frac{f^n(64)}{n!}(x-64)^n + R_n(64, x), \end{aligned}$$

wo das Restglied gegeben ist durch

$$R_n(64, x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-64)^{n+1}$$

für ein $\xi \in (64, x)$. Wir sehen, dass

$$\frac{\mathrm{d}(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{2}{3^2}x^{-\frac{5}{3}},$$
$$\frac{\mathrm{d}^3(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^3} = \frac{2\cdot 5}{3^3}x^{-\frac{8}{3}}, \qquad \frac{\mathrm{d}^4(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}x^{-\frac{11}{3}},$$

und so weiter. Durch Induktion erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}^k(\sqrt[3]{x})}{\mathrm{d}x^k} = (-1)^{k+1}\frac{(3-1)(6-1)\cdots(3(k-1)-1)}{3^k}x^{-k+\frac{1}{3}},$$

somit in unserem Fall mit $x = 65$ erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}|R_n(64,x)| = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{(3-1)(6-1)\cdots(3n-1)}{3^{n+1}}\xi^{-(n+1)+\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\frac{3-1}{3}\cdot\frac{6-1}{3}\cdots\frac{3n-1}{3}\cdot\frac{1}{3}\xi^{-(n+1)+\frac{1}{3}} \\ &\leq \frac{n!}{(n+1)!}\frac{1}{3}64^{-(n+1)+\frac{1}{3}} = \frac{1}{n+1}\frac{4}{3}64^{-(n+1)},\end{aligned}$$

daraus folgt, dass n so gewählt werden muss, dass

$$\frac{1}{n+1}\frac{4}{3}64^{-(n+1)} < 0.000005 = \frac{10^{-5}}{2},$$

insbesondere $n+1 > \log_{64} 10^5 \approx 2.76$, somit $n \geq 2$. Mit $n = 2$ erhalten wir die Annäherung

$$\sqrt[3]{64} + \frac{1}{3(\sqrt[3]{64})^2} - \frac{2}{9(\sqrt[3]{64})^5} = 4 + \frac{1}{48} - \frac{1}{9216} = \frac{37055}{9216} = 4.02072.$$

Weil $4.02072 + \frac{10^{-5}}{2} = 4.020725$, gibt es keinen Übertrag in der Addition: das stellt sicher, dass die ersten 5 Nachkommastellen der obigen Annäherung exakt sind.

9.4. Anwendungen der Differentialrechnung

(a) Seien x und y die Länge der Seiten eines Rechteckes. Wie bekannt, sind Flächeninhalt A und Umfang U gegeben durch:

$$A = xy \quad \text{und} \quad U = 2(x+y).$$

In unserem Fall, ist A bestimmt, somit können wir eine der Seiten (z.B. y) durch A ausdrücken:

$$y = \frac{A}{x},$$

somit wird der Umfang eine Funktion von x, nämlich

$$U(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right).$$

Wir untersuchen durch Differentialrechnung die Maximalstellen von U. Die kritische Stellen sind definiert durch

$$U'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{A}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{A}.$$

In unserem Fall, ist nur die positive kritische Stelle relevant. Wir sehen, dass die zweite Ableitung von U

$$U''(x) = \frac{2A}{x^3}$$

immer positiv für $x > 0$ ist, somit muss $x = \sqrt{A}$ die globale Minimalstelle von U sein. Das liefert, dass $y = x = \sqrt{A}$, somit ist, für jeden gegebene Flächeninhalt A, ein Quadrat mit Seite $\sqrt{A}$ das Rechteck mit kleinstem Umfang.

(b) Mit der Notation von (a) hat ein Rechteck mit Seitenlängen x und y Umfang $U = 2(x + y)$ und Flächeinhalt $A = xy$. Ein Quadrat mit gleichem Flächeinhalt hat Seitenlänge $\sqrt{xy}$ und Umfang $4\sqrt{xy}$. Aus a folgern wir, dass weil das Quadrat die Umfrang minimiert, gilt

$$U_{\text{Quadrat}} \leq U_{\text{Rechtecke}} \Leftrightarrow 4\sqrt{xy} \leq 2(x + y),$$

und das liefert die gesuchte Ungleichung.

(c) Die Grössten b und h sind verknüpft über der Satz des Pythagoras wie folgt:

$$b^2 + h^2 = (2R)^{\Rightarrow} h^2 = 4R^2 - b^2,$$

somit lässt sich das Widerstandsmoment W als eine nur von der Grösse b abhängige Funktion darstellen:

$$W(b) = \frac{1}{6} bh^2 = \frac{1}{6}(4R^2 b - b^3) \quad b \in (0, 2R).$$

Die Randwerte $b = 0$ und $b = 2R$ kommen als Lösungen nicht in Frage. Wir bestimmen das absolute Maximum von $W(b)$ im Intervall $(0, 2R)$. Die Ableitungen von W lauten:

$$W'(b) = \frac{1}{6}(4R^2 - 3b^2), \quad W''(b) = -b.$$

Aus der für ein Maximum notwendingen Bedingung $W'(b) = 0$ folgt dann:

$$\frac{1}{6}(4R^2 - 3b^2) = 0 \Rightarrow b = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}R$$

Nur der positive Wert ist relevant. Weil $W''(\frac{2}{3}\sqrt{3}R) < 0$, ist $\frac{2}{3}\sqrt{3}R$ das gesuchte Maximum. Der optimale Balker ist dann durch:

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{3}R \quad \text{und} \quad h = \sqrt{\frac{8}{3}}R$$

definiert und das maximale Widerstandsmoment ist

$$W_{\max} = W\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}R\right) = \frac{8}{27}\sqrt{3}R^3.$$