10.1. MC Fragen: Das riemmansche Integral Wählen Sie die Richtige Antworten.

(a) Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse, und den Geraden $x = a$ und $x = b$ lässt sich berechnen mittels

☐ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; ☐ $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$; ☐ $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Im allgemeinen besteht die Fläche aus je einem Teil über und unter der x-Achse. Das Integral von $f(x)$ zählt den oberen mit positivem und den unteren mit negativem Vorzeichen. Somit liefert (a) die Differenz der beiden Flächeninhalte und (c) den Absolutbetrag der Differenz. Das Integral von $|f(x)|$ zählt beide mit positivem Vorzeichen; die richtige Antwort ist also $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(b) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

☐ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

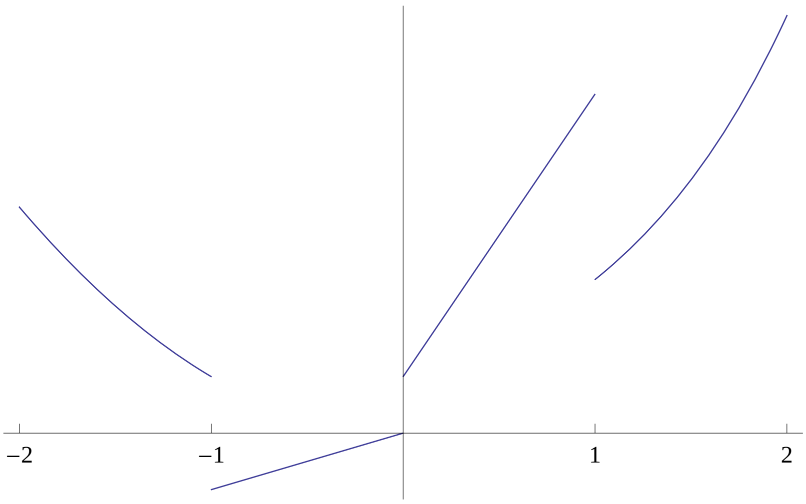
☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.

☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

☐ Keine.

Korrekt ist nur ist die erste Implikationskette: Differenzierbare Funktionen sind stetig und nach dem Hauptsatz integrierbar. Die Umkehrungen gelten nicht: Zum Beispiel ist die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig aber nicht differenzierbar. Es gibt auch Funktionen, welche integrierbar aber nicht stetig sind. Ein Beispiel sind sogenannte stückweise stetige Funktionen. Die Idee dabei ist: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst stückweise stetig, wenn es eine Unterteilung von $[a, b]$ in offene Teilintervalle gibt, sodass f auf jedem Teilintervall stetig ist. Im Beispiel

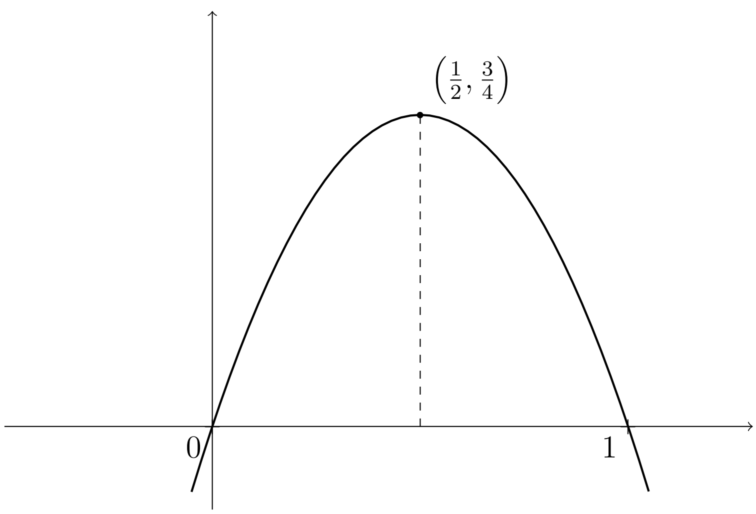


ist $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ stetig auf den Teilintervallen $]-2, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ und$]1, 2[$. Die Funktion springt an den Stellen -1, 0 und 1. Über den Funktionswert an den Sprungstellen x_i wird nichts vorausgesetzt. Es sollen jedoch jeweils der Grenzwert von links oder rechts existieren. Das Integral einer solchen Funktion wird dann definiert als:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\mathrm{d}x.$$

10.2. Riemannschen Summen

(a) Die Funktion f definiert eine Parabel. Ihr Graph und die gesuchten Informationen sind in dieser Abbildung eingezeichnet:



(b) Aus der Definition der Riemannschen Summe erhalten wir:

$$\begin{aligned} S(P,f,\xi) &= \sum_{k=1}^{10} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} f\left(\frac{2k-1}{20}\right)\frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10}\left(f\left(\frac{1}{20}\right) + f\left(\frac{3}{20}\right) + \ldots + f\left(\frac{19}{20}\right)\right) = \frac{201}{400} = 0.5025. \end{aligned}$$

(c) In unserem Fall ist $b = 1$, $h = \frac{3}{4}$ somit erhalten wir, dass die Fläche

$$A = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

misst. Der Fehler ist somit $|A - S(P,f,\xi)| = 0.0025$.

10.3. Integral mit Riemannschen Summen Die Exponentialfunktion ist bekanntlich stetig, somit existiert ihr Integral. Wie betrachten eine Partition, die das Intervall $[0,a]$ in N Intervalle gleicher Länge teilt, nämlich:

$$P = \left\{0, \frac{a}{N}, \frac{2a}{N}, \ldots, \frac{(n-1)a}{N}, a\right\}.$$

Weil exp monoton wachsend ist, ist die Riemannsche Untersumme von exp zu dieser Partition:

$$\begin{aligned} \underline{S}(\exp, P) &= \sum_{k=1}^{N} \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} (\mathrm{e}^x)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{x_k}\frac{a}{N} \\ &= \frac{a}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{\frac{(k-1)a}{N}} \\ &= \frac{a}{N}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{a}{N}} + \mathrm{e}^{\frac{2a}{N}} + \mathrm{e}^{\frac{3a}{N}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{(n-1)a}{N}}\right). \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass eine geometrische Summe (siehe Beispiel 3.7.1) vorliegt, somit folgern wir, dass

$$\underline{S}(\exp, P) = \frac{a}{N}\frac{\mathrm{e}^a - 1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{N}} - 1}.$$

Aus dem elementaren Grenzwert (z.B. mit der Regel von de l'Hôpital):

$$\lim_{N\to\infty} \frac{a}{N}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{a}{N}}-1} = 1,$$

schliessen wir, dass $\lim_{N\to\infty} \underline{S}(\exp, P) = \mathrm{e}^a - 1$, und dieser Grenzwert muss das gesuchte Integral sein. Alles in allem:

$$\int_0^a \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^a - 1.$$

10.4. Stammfunktionen

(a) Wie bekannt ist, lautet die Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

somit ist $x \mapsto (f \circ g)(x)$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f'(g(x))g'(x)$.

Mit (a) können wir die gesuchten Stammfunktionen einfach berechnen.

(b) Mit $f(x) = x^{2018}$ und $g(x) = x^3 + 5x + 1$, erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto \frac{(x^3+5x+1)^{2018}}{2018}$.

(c) Mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ und $g(x) = \cos x$ erhalten wir die Stammfunktion $x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$.

(d) Mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1 + 5x^2$, und weil wir die gegebene Funktion als

$$\frac{x}{\sqrt{1+5x^2}} = \frac{1}{10}\frac{10x}{\sqrt{1+5x^2}}$$

schreiben können, folgern wir, dass eine Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{5}\sqrt{1+5x^2}$ ist.

(e) Wir erinnern uns daran, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, somit erhalten wir mit $f(x) = \arctan x$ und $g(x) = \cos x$ die Stammfunktion $x \mapsto \arctan(\cos x)$.

(f) Wie bekannt ist, gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Weil wir wissen nicht ob f positiv ist, müssen wir einen Betrag hinzufügen: eine Stammfunktion ist dann $x \mapsto \log|f(x)|$.

(g) Weil $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $\cos'(x) = -\sin x$, folgern wir mit (f), dass eine Stammfunktion $x \mapsto -\log|\cos(x)|$ ist.

10.5. Eine wichtige Schranke

(a) Da f Riemann Integrabel ist, folgt aus der Definition dass es ein $I \in \mathbb{R}$ gibt so dass: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass

$$|I| - \epsilon < S(f, P, \xi) < |I| + \epsilon,$$

für jede Partition P von $[a, b]$ mit $|x_{i+1} - x_i| < \delta$, und für jede Wahl von Zwischenpunkten ξ.

Nehmen wir an f ist nicht beschränkt, dann wollen wir zeigen dass es für jede vorgegebene Feinheit δ eine Einteilung und Wahl von Zwischenpunkten gibt für die die Riemannsche Summe beliebig gross gemacht werden kann.

Da f unbeschränkt ist, gibt es einen Index $1 \leq i \leq n$, so dass f in $[x_{i-1}, x_i]$ unbeschränkt ist. Also gibt es ein Punkt $\xi_{i_0} \in [x_{i-1}, x_i]$ so dass $|f(\xi_{i_0})| \geq M, \forall M \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dann auch, dass

$$|f(\xi_{i_0})|(x_i - x_{i-1}) > |I| + \epsilon + \left| \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right|$$

Nun folgt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\begin{aligned}
|S(f, P, \xi)| &= \left| f(\xi_{i_0})(x_i - x_{i-1}) + \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right| \\
&\geq |f(\xi_{i_0})| \, (x_i - x_{i-1}) - \left| \sum_{1 \leq i \neq i_0 \leq n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \right| \\
&> |I| + \epsilon.
\end{aligned}$$

aber dass widerspricht der Integrabilität von f.

(b) Es gilt

$$|S(f, P, \xi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \, (x_i - x_{i-1}) \leq M(b - a),$$

für jede Einteilung und jede Wahl von Zwischenpunkten.