11.1. MC Fragen: Integration

(a) Die Existenz einer Stammfunktion von f ist garantiert,

☐ wenn f stetig ist.

Richtig. Siehe Vorlesung.

☐ wenn f stückweise stetig ist.

Falsch. Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0, \end{cases}$$

ist ein Gegenbeispiel.

☐ wenn f differenzierbar ist.

Wenn f differenzierbar ist, dann ist f auch stetig und besitzt somit eine Stammfunktion.

☐ immer.

Richtig. Siehe das obige Gegenbeispiel.

(b) Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ beträgt

☐ 0.

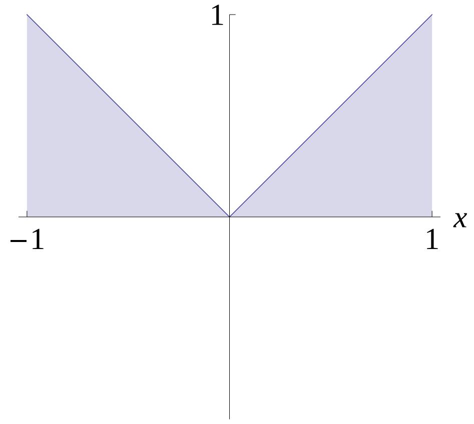
☐ 1.

☐ 2.

☐ 4.

☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ ist der Inhalt der Fläche, welche der Funktionsgraph mit der x-Achse einschliesst. Also:



Die beiden Dreiecke bilden zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, welches den Flächeninhalt 1 hat. Mithin gilt $\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 1$. Alternativ können wir aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Betragsfunktion auch rechnen:

$$\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} t\, dt = 2 \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = 1;$$

somit ist

☐ 1

die richtige Antwort.

11.2. Durch Integrale definierte Funktionen Wie bekannt, lautet der Hauptsatz der Integralrechnung, dass für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $c \in [a, b]$ die Funktion $F(x) = \int_c^x f(t)\, \mathrm{d}t$ differenzierbar ist mit Ableitung $F'(x) = f(x)$.

Wir betrachten A als Komposition: $A = (\phi \circ \beta)(x)$, wobei

$$\phi(x) = \int_0^x \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t)\, \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \beta(x) = x^7 + \mathrm{e}^x.$$

Die Kettenregel und der Hauptsatz der Integralrechnung liefern demnach:

$$A'(x) = \phi'(\beta(x))\beta'(x) = \cos(\exp(2(x^7 + \mathrm{e}^x)) + 2(x^7 + \mathrm{e}^x))(7x^6 + \mathrm{e}^x).$$

Was B betrifft, so können wir uns wegen der Additivität des Integrals:

$$\int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_{x^2+1}^{c} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t + \int_{c}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \quad (c \text{ belibig}),$$

B als

$$B(x) = (\phi_1 \circ \beta_1)(x) + (\phi_2 \circ \beta_2)(x)$$

denken, wobei

$$\phi_1(x) = \int_x^c \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, = -\int_c^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \beta_1(x) = x^2+1,$$
$$\phi_2(x) = \int_c^{x^2+5} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \beta_2(x) = x^2+5.$$

Nochmals durch die Kettenregel und den Hauptsatz der Integralrechnung schliessen wir, dass

$$\begin{aligned} B'(x) &= \phi_1'(\beta_1(x))\beta_1'(x) + \phi_2'(\beta_2(x))\beta_2'(x) \\ &= -\frac{\sin(x^2+1)}{x^2+1}2x + \frac{\sin(x^2+5)}{x^2+5}2x. \end{aligned}$$

11.3. Gewichteter Mittelwertsatz

(a) Weil $F > 0$ ist, gilt:

$$\left(\inf_{[a,b]} G\right) F(x) \le G(x)F(x) \le \left(\sup_{[a,b]} G\right) f(x) \quad \text{für jedes } x \in [a,b];$$

somit folgt aus der Monotonie des Integrals:

$$\left(\inf_{[a,b]} G\right) \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x \le \left(\sup_{[a,b]} G\right) \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,$$

danach (bemerken Sie, dass weil $F > 0$, $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x > 0$ ist):

$$\inf_{[a,b]} G \le \frac{\int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x} \le \left(\sup_{[a,b]} G\right).$$

Da G stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass $c \in [a,b]$ existiert, sodass:

$$G(c) = \frac{\int_a^b G(x)\,F(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x},$$

gilt, welches zu der Schlussfolgerung führt.

(b) Falls nicht notwendigerweise $F > 0$, ist die Aussage falsch. Gegenbeispiel:

$$[a,b] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad F(x) = \sin x, \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{falls } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right), \end{cases}$$

Man berechnet sofort, dass

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)G(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, \mathrm{d}x = 1 \qquad \sup_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} G = \frac{\pi}{2};$$

somit ist es unmöglich, dass $c \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ existiert, welches die Aussage des gewichteten Mittelwertsatzes erfüllt:

$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)G(x)\, \mathrm{d}x, \qquad G(c) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{für jedes } c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

11.4. Taylorscher Satz mit Integralrestglied

(a) Der Fall $n = 0$ lautet:

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, \mathrm{d}t,$$

aber das ist genau der Hauptsatz der Integralrechnung, wodurch es wahr ist. Der Fall $n = 1$ lautet:

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)\,(x - t)\, \mathrm{d}t.$$

Mit partieller Integration und durch den Hauptsatz der Integralrechnung sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \underset{\uparrow}{f''(t)}\, \underset{\downarrow}{(x - t)}\, \mathrm{d}t &= \left[f'(t)\,(x - t)\right]_{t=x}^{t=x_0} + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= -f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x) - f(x_0), \end{aligned}$$

und das liefert den Nachweis.

(b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ benutzen wir Induktion. Die Fälle $n = 0, 1$ wurden in (a) gezeigt; wir nehmen den Fall $n - 1$ an:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\,(x - t)^{n-1}\, \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{1}$$

und berechnen das Restglied mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} \underset{\downarrow}{f^{(n)}(t)}\underset{\uparrow}{(x-t)^{n-1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n}\right]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n}\,\mathrm{d}t \\
&= f^{(n)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^n}{n} + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Wir ersetzen diesen Ausdruck in (1), um die gesuchte Formel zu erhalten.

Um das Restglied von Integral- zu Lagrange-Form zu umformen, ist es genug, den gewichtete Mittelwertsatz 11.3 mit $[a,b]=[x_0,x]$, $F(t)=(x-t)^n$ und $G(t)=f^{(n+1)}(t)$ benutzen: es existiert $\xi \in [x_0,x]$ sodass:

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1};$$

alles in allem:

$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x_0-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1},$$

und das liefert den Nachweis.

11.5. Berechnung von Integrale

(a)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{2-x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left(2x^{-1}-x+1\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[2\log|x| - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{x=1}^{4} \\
&= 2\log 4 - 8 + \frac{1}{2} + 4 - 1 = 4\log 2 - \frac{9}{2}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_1^9 (\sqrt{x}-1)(x+1)\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 x^{3/2} - x + x^{1/2} - 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2} - x\right]_{x=1}^{9} \\
&= \frac{2}{5}(3^5-1) - \frac{1}{2}(9^2-1) + \frac{2}{3}(3^3-1) - 9 + 1 \\
&= \frac{484}{5} - 40 + \frac{52}{3} - 8 \;=\; \frac{992}{15}\,.
\end{aligned}$$

(c) Wie in 10.4 (c) berechnet,

$$\int \mathrm{e}^{\cos x} \sin x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{\cos x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Wir integrieren partiell:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underset{\downarrow}{t^2} \underset{\uparrow}{\cos(2t)}\ \mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)t^2\right]_0^1 - \int_0^1 \underset{\uparrow}{\sin(2t)}\underset{\downarrow}{t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\left[\cos(2t)t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 -\cos(2t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2) + \left[\frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^1\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{4}\sin(2) = \frac{1}{4}(\sin(2) + 2\cos(2)).
\end{aligned}$$

(e) Wir teilen den Burch auf:

$$\frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{1}{2}.$$

Weil $\tan(x)' = \frac{1}{\cos(x)^2}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 1\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\tan(x)\right]_0^{\pi/4} - \frac{\pi}{8} \ = \ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\ .
\end{aligned}$$

(f) Wie in 10.4 (b) berechnet,

$$\int (x^3+5x+1)^{1291}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{(x^3+5x+1)^{1292}}{1292} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(g) Wir integrieren zwei Mal partiell bis wir auf der rechten Seite wieder das Integral der linken Seite (mit anderem Faktor) finden:

$$\begin{aligned}
I &= \int \underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{5x}}\underset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} - 5\int -\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{5x}}\underset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x + C \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} + 5e^{5x}\sin(x) - 25\int e^{5x}\sin(x)\,\mathrm{d}x + C \\
&= -\cos(x)\mathrm{e}^{5x} + 5\mathrm{e}^{5x}\sin(x) - 25I + C,
\end{aligned}$$

Daher gilt

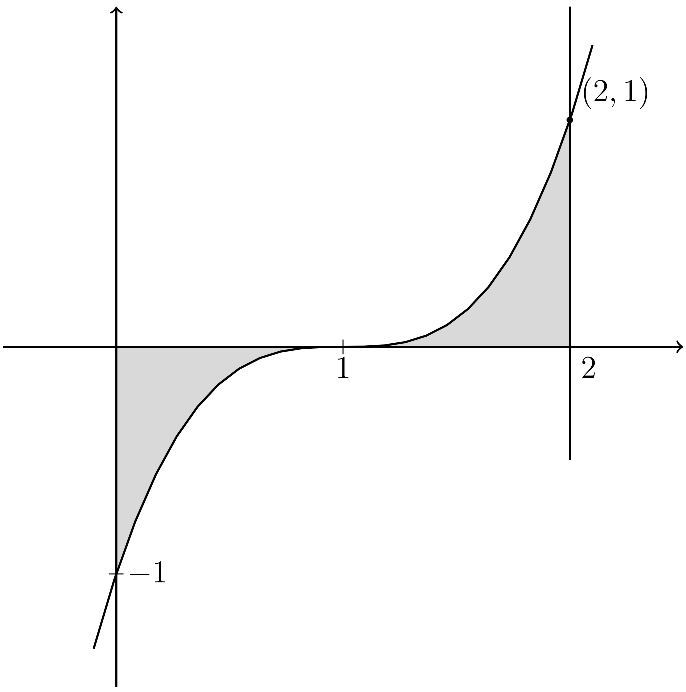
$$\int e^{5x}\cos(x)\,dx = I = \frac{1}{26}(5e^{5x}\sin(x) - e^{5x}\cos(x)) + C \quad C \in \mathbb{R}.$$

(h) Wie in 10.4 (d) berechnet,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{1+5x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

11.6. Fläche und Integralrechnung

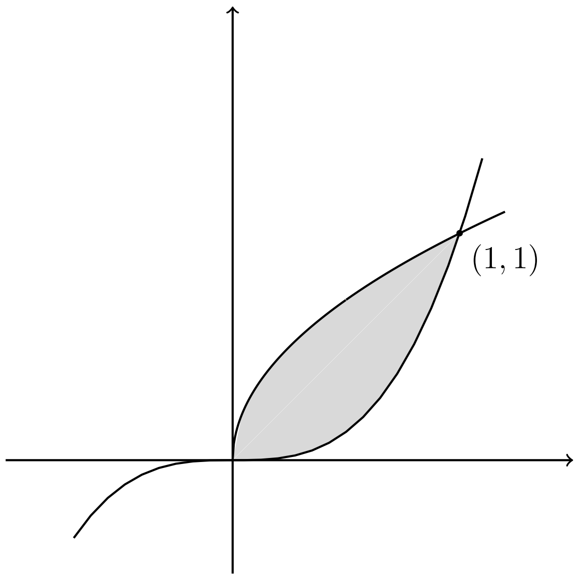
(a) Das Gebiet besteht aus zwei Stücken, eines unter der x-Achse von $x = 0$ zu $x = 1$ und das andere oberhalb der x-Achse von $x = 1$ zu $x = 2$.



Somit ist die Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 -(x-1)^3\,dx + \int_1^x (x-1)^3\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}(x-1)^4\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

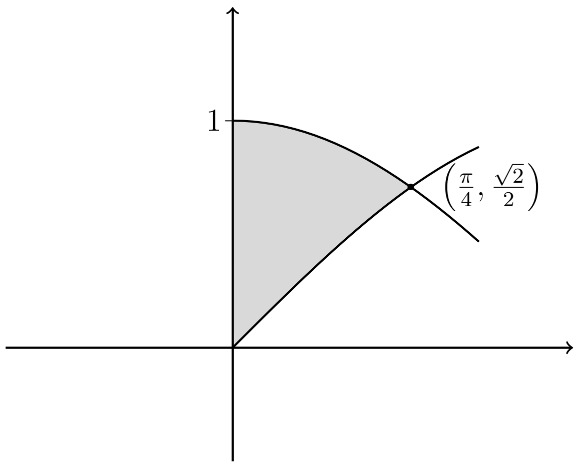
(b) Die Schnittpunkte zwischen den Kurven sind $(0,0)$ und $(1,1)$, die Zeichnung ist wie folgt:



Demnach ergibt sich die Fläche als Differenz folgender Integrale:

$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

(c) Zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$ liegt der Graph von $\cos x$ oberhalb des Graphen von $\sin x$:



Somit kann die Fläche berechnet durch:

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x\,\mathrm{d}x = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1.$$