

12.1. MC Fragen: Uneigentliche Integrale

(a) Sei $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

- Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.

Falsch. Z.B. existiert $\int_1^\infty f(x)dx$ für f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & n \leq x \leq n + 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

aber $(f(n) = 1)_n$ ist keine Nullfolge.

- Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.

Falsch. Siehe erste Teilaufgabe.

- Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Falsch. Siehe erste Teilaufgabe.

- Falls f monoton fallend ist, ist $(f(n))_n$ eine Nullfolge.

Richtig. Aus Satz 6.5.1, wissen wir, dass die Reihe $\sum_n f(n)$ konvergiert. Also ist es nötig, dass $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$.

(b) Gegeben sei die Fehlerfunktion (Engl. error function)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Der Wert von:

$$\int_1^2 e^{-ax^2} dx, \quad a > 0$$

ist:

- $\frac{1}{\sqrt{a}} (\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a}))$
- $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} (\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(1))$
- $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} (\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a}))$
- $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} (\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a}))$
- $\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^2 e^{-ax^2} dx &= \int_0^2 e^{-ax^2} dx - \int_0^1 e^{-ax^2} dx && \text{Substitution: } t = \sqrt{a}x \\ &= \int_0^{2\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2} dt - \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{a}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a}) \right).\end{aligned}$$

Somit ist die vierte Antwort korrekt.

12.2. Berechnung von Integralen Wir nennen jeweils “ I ” das betrachtete Integral.

(a) Ein kurzer Weg verwendet komplexe Zahlen. Da:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) = \frac{1}{2}(1 - \Re(e^{2it})),$$

wobei “ $\Re(z)$ ” = Realteil von z , ergibt sich:

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{2}(e^{-t} - \Re(e^{(-1+2i)t})) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(-e^{-t} - \Re \left(\int e^{(-1+2i)t} dt \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-e^{-t} + \Re \left(\frac{e^{(-1+2i)t}}{1-2i} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-e^{-t} + \frac{1}{5} \Re \left((1+2i)e^{(-1+2i)t} \right) \right) \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \left(-1 + \frac{1}{5} \Re \left((1+2i)e^{2it} \right) \right) \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \left(-1 + \frac{1}{5} \cos(2t) - \frac{2}{5} \sin(2t) \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Äquivalent erhält man mit $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ und partieller Integration das Ergebnis.

(b) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$t = 2 \arctan u, \quad dt = \frac{2}{1+u^2}, \quad \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \frac{1}{1+\cos t} = \frac{1+u^2}{2}.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \int \frac{1+u^2}{2} \cdot \frac{2}{1+u^2} du = u + C = \tan \left(\frac{t}{2} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(c) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$2t \, dt = du, \quad t^2 = u - 1, \quad \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{u}.$$

Damit ergibt sich:

$$I = \int \frac{u-1}{2\sqrt{u}} \, du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - \sqrt{u} + C = \frac{1}{3}(t^2 - 2)\sqrt{t^2 + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Die vorgeschlagene Substitution besagt:

$$dt = 2 \sin u \cos u \, du, \quad \sqrt{1-t} = \cos u, \quad \sqrt{t} = \sin u.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2 \sin u \cos^2 u}{\sin u - \sin^2 u} \, du \\ &= \int 2(1 + \sin u) \, du \\ &= 2(u - \cos u) + C = 2(\arcsin(\sqrt{t}) - \sqrt{1-t}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(e) Wir verwenden der Substitution $u = \sqrt{1 + e^t}$:

$$t = \log(u^2 - 1), \quad dt = \frac{2u}{u^2 - 1} \, du$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{u^2 - 1} \, du \\ &= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) \, du \\ &= \log \left(\frac{u-1}{u+1} \right) + C = \log \left(\frac{\sqrt{1+e^t} - 1}{\sqrt{1+e^t} + 1} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

12.3. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen Wir nennen jeweils “ I ” das betrachtete Integral und “ f ” die betrachtete Funktion.

(a) Mit den Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} - \frac{t+2}{2(t^2+2)} dt \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \log |t| - \frac{1}{4} \log(t^2+2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Mit den Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2(t+1)^2} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{4(t-1)} dt \\ &= -\frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4} \log(|t+1|) + \frac{1}{4} \log(|t-1|) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Durch die in der Vorlesung gesehenen Techniken erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(t) = 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} I &= \int 1 + \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{t^2+1} dt \\ &= t + \frac{t}{t^2+1} + \arctan(t) - 2 \arctan(t) + C \\ &= t + \frac{t}{t^2+1} - \arctan(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(d) Die Nullstellen des Polynoms $t^6 - 1$ sind die Zahlen ω^k , $k = 0, 1, \dots, 5$, wobei:

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

damit besitzt f eine (komplexe) Partialbruchzerlegung der Form:

$$f(t) = \sum_{k=0}^5 \frac{C_k}{t - \omega^k}.$$

Da

$$\omega^0 = 1, \quad \omega^3 = -1, \quad \omega^4 = \overline{\omega^2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega^5 = \overline{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

erhält man eine reelle Zerlegung von f , indem man die Terme $\{2, 4\}$ und $\{1, 5\}$ zusammenfasst:

$$f(t) = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{Et+F}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}},$$

d.h.

$$f(t) = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1} + \frac{Et+F}{t^2+t+1},$$

für Konstanten A, B, C, D, E, F , die wir bestimmen müssen. Geduldig verwenden wir den Koeffizientenvergleich und erhalten wir den Ausdruck:

$$f(t) = \frac{1}{6(t-1)} - \frac{1}{6(t+1)} + \frac{t-2}{6(t^2-t+1)} - \frac{t+2}{6(t^2+t+1)},$$

somit ist das Integral:

$$\begin{aligned} \int f(t) dt &= \frac{1}{6} \log(|t-1|) \\ &\quad - \frac{1}{6} \log(|t+1|) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \log(t^2-t+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \log(t^2+t+1) - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) \right). \end{aligned}$$

12.4. Uneigentliche Integrale Wir nennen jeweils “ I ” das betrachtete Integral.

(a) Da $\frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \leq \frac{1}{x^3}$ für $x > 0$, gilt

$$\int_1^a \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx \leq \int_1^a \frac{1}{x^3} dx \quad \text{für jedes } a > 1,$$

und bekanntlich ist $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ konvergent; ausserdem ist $a \mapsto \int_1^a \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$ monoton wachsend, weil der Integrand positiv ist. Wir schliessen, dass der Grenzwert für $a \rightarrow +\infty$ existiert, das heisst, dass I konvergent ist.

Mit der Substitution $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$ ($x = \frac{t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt$) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx &= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{(1-t^2)^3}{t^6} t \frac{2t}{(1-t^2)^2} dt \\ &= 2 \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \frac{1-t^2}{t^4} dt = 2 \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} t^{-4} - t^{-2} dt \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3} t^{-3} + t^{-1} \right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{a}{1+a}}} \\ &= 2 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{a}{a+1} \right)^{-3/2} + \sqrt{\frac{a+1}{a}} + \frac{1}{3} 2^{3/2} - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

also:

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^3} \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx = \frac{2}{3} (2 - \sqrt{2}).$$

(b) Das Integral konvergiert genau dann, wenn das Integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

konvergiert. Mit der Substitution $t = \frac{1}{x}$ und für $0 < \epsilon < A$ erhalten wir:

$$\int_{\epsilon}^A \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = - \int_{1/\epsilon}^{1/A} e^{-t} dt = [e^{-t}]_{1/A}^{1/\epsilon} = e^{-\frac{1}{\epsilon}} - e^{-\frac{1}{A}},$$

und dieser Ausdruck strebt nach 1 für $A \rightarrow +\infty$ und $\epsilon \rightarrow 0^+$. Somit konvergiert das Integral und

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx = 2.$$

(c) Wir sehen, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{|x| \log |x|}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x|x|}{1+x^2} \log x = +\infty,$$

somit wächst der Integrand schneller als $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ nicht integrierbar über $(1, +\infty)$ ist, kann I erst recht nicht konvergieren.

(d) Wir trennen das Integral:

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx.$$

Weil $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$, und weil $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ konvergent ist, ist I_1 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Weil $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ für $x \geq 1$, und $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ konvergent ist, ist I_2 nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Wir folgern, dass I konvergiert.

Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ erhalten wir:

$$\int_a^b \frac{1}{t(1+t^2)} 2t dt = 2 [\arctan t]_a^b = 2(\arctan b - \arctan a).$$

Da $\lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$ und $\arctan(0) = 0$, wir schliessen, dass $I = \pi$.

(e) Für alle $t \geq 0$ gilt mittels Taylor-Formel: $\sin t = t - \frac{t^3}{6} \cos \tau$ für ein $\tau \in [0, t]$.
Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{6}{6 - t^2 \cos \tau} - 1 \right) = \frac{t \cos \tau}{6 - t^2 \cos \tau} \leq \frac{t}{5}, \quad t \in [0, 1].$$

Der Integrand ist stetig nach 0 fortsetzbar, somit ist das Integral konvergent.

(f) Die Funktion $1 - x^x = 1 - e^{x \log x}$ ist positiv in $(0, \frac{1}{e})$, weil $x \log x < 0$ in $(0, \frac{1}{e})$.
Da $e^t > 1 + t$ für jedes $t > 0$, erhalten wir:

$$e^{x \log x} > 1 + x \log x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 - e^{x \log x}} > \frac{1}{1 - (1 + x \log x)} = \frac{1}{x \log x}.$$

Bekanntlich ist $\int_0^a \frac{1}{x \log x} dx$ divergent. Somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral divergent.

(g) Die Substitution $t = \frac{1}{u}$ liefert, dass es äquivalent ist, die Konvergenz von:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2} dx$$

zu untersuchen. Mittels Taylor-Formel gilt: $\sin u = u - \frac{u^3}{6} \cos \tau$ für ein $\tau \in [0, u]$,
somit:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{u} - \frac{\cos \tau}{6} u \right) du,$$

und dieses Integral ist bekanntlich divergent. Somit ist I divergent.

12.5. Gammafunktion

(a) Wir trennen das Integral:

$$\Gamma(\alpha) = I_1 + I_2 = \int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Wegen $\alpha - 1 > -1$, konvergiert das Integral $\int_0^1 t^{\alpha-1} dt$. Wegen $0 < t^{\alpha-1} e^{-t} < t^{\alpha-1}$ für $0 < t \leq 1$, konvergiert I_1 .

Was I_2 betrifft, gibt es zu vorgegebenem $\alpha > 0$ ein t_0 mit $e^t > t^{\alpha+1}$ für $t > t_0$. Hieraus folgt

$$t^{\alpha-1} e^{-t} \leq \frac{1}{t^2} \quad \text{für } t > t_0,$$

und dies impliziert die Konvergenz des Integrals $\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$

(b) In der nachfolgenden Rechnung müssten strenggenommen Integrale von ϵ bis x betrachtet werden; anschliessend wäre der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$ durchzuführen. Es gilt:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} \underset{\downarrow}{t^\alpha} \underset{\uparrow}{e^{-t}} dt = \left[-t^\alpha e^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \alpha t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \alpha \Gamma(\alpha);$$

denn der erste Summand liefert wegen

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha e^{-t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha e^{-t} = 0$$

keinen Beitrag.

(c) Wir benutzen Induktion und (a). Es gilt:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1 = 0!.$$

Induktionsschritt:

$$\Gamma(n+2) \stackrel{(a)}{=} (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Wir schliessen, dass bis auf Ersetzen $n \rightsquigarrow n+1$ die Gammafunktion eine Fortsetzung der Fakultätsfunktion: $n \mapsto n!$ auf nichtganze Werte ist.

(d) Zuerst bemerken wir, dass das Gaussche Integrals geschrieben werden kann als:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Mit der Substitution $u = \sqrt{t}$ erhalten wir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi},$$

somit ist $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.