13.1. MC Fragen: Differentialgleichungen

(a) Welche der folgenden Differentialgleichungen sind linear?

☐ $(y'-2)^2 = y$

Falsch: es taucht y' im Quadrat auf.

☐ $\frac{y'}{1-x^2} + \frac{y}{1+x} = \frac{1}{x^2}$

Richtig: die DGL lässt sich umschreiben zu $y' = (x-1)\cdot y + \dfrac{1-x^2}{x^2}$.

☐ $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

Falsch: es taucht y im Quadrat (und im Nenner) auf.

☐ $y'' + y' + y^2 = 0$

Falsch: es taucht y im Quadrat auf.

☐ $y = xy' + (y')^2$

Falsch: es taucht y' im Quadrat auf.

(b) Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist (sind) falsch?

☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.

☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.

☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Aussagen (a) und (d) sind richtig nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz – sogar ohne jede Rechnung. In (c) ist dagegen eine Nebenbedingung zuwenig, und nach demselben Satz existiert zu jedem beliebigen zweiten Startwert $y'(0)$ eine Lösung. Es existieren also unendlich viele Lösungen in (c), und deshalb ist die Aussage (c) falsch. In (b) ist zwar eine Nebenbedingung zuviel, und das kann im allgemeinen dazu führen, dass keine Lösung existiert. Das Beispiel war aber gerade so gewählt, dass die dritte Bedingung auf Grund der Differentialgleichung aus den ersten beiden folgt, also o.B.d.A. entfernt werden kann. Daher ist (b) in diesem Fall richtig (und $e^{-x} - e^{-2x}$ ist die Lösung). Die korrekte Antwort lautet also (c).

13.2. Konvergenz von Reihen

(a) Da die Funktion:

$$t \mapsto \frac{1}{t\log(t)(\log\log(t))^s}$$

positiv und monoton fallend für $t \geq 3$ ist, verwenden wir das Integralkriterium für Reihen: die Reihe konvergiert genau dann, wenn das Integral:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{t\log(t)(\log\log(t))^s}\,\mathrm{d}t$$

konvergiert. Durch den Variablenwechsel $u = \log t$ erhalten wir:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{t\log(t)(\log\log(t))^s}\,\mathrm{d}t = \int_{\log 3}^{+\infty} \frac{1}{u(\log u)^s}\,\mathrm{d}u.$$

Wir benutzen nochmal das Integralkriterium: das letzte Integral konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{h=\log 3}^{+\infty} \frac{1}{h(\log h)^s}$ konvergiert; wir wissen, dass dies genau dann, wenn $s > 1$, wahr ist. Somit konvergiert die ursprüngliche Reihe genau dann, wenn $s > 1$.

(b) Die Funktion $\phi(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x-1}$ ist differenzierbar und hat Ableitung:

$$\phi'(x) = -\frac{(1+x^2)(-1+3x^2)}{(-1-x+x^3)^2} + \frac{2x}{-1-x+x^3},$$

welche negativ ist, wenn $x \geq 1$. Somit ist ϕ monoton fallend und wir können das Integralkriterium verwenden. Wir sehen, dass:

$$\phi(x) = \frac{x^2}{x^3}\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}\right) \geq \frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} \geq \frac{1}{x} \quad \text{für } x \geq 2;$$

somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral $\int_2^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$ divergent, und das wiederum liefert dass die Reihe divergent ist.

(c) Die Funktion $\phi(x) = \frac{\log x}{(2x+1)^2}$ ist monoton fallend für $x \geq 1$. Nach dem Integralkriterium ist die Reihe konvergent, genau dann wenn $\int_1^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent ist. Weil für jedes $x > 0$ gilt, dass $\log x \leq \sqrt{x}$, gilt:

$$\frac{\log x}{(2x+1)^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{(2x+1)^2} \leq \frac{1}{4x^{3/2}} \quad \text{für } x \geq 1,$$

somit ist nach dem Majorantenkriterium das Integral $\int_1^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent und das liefert, dass die betrachtete Reihe konvergent ist.

13.3. Differentialgleichungen erster Ordnung

(a) Wir verwenden die Substitution $z = x + y$, d.h. $z' = 1 + y'$. Die DGl wird dann $z' = z^2 + 1$, also separierbar. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z^2 + 1 \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \arctan z = x + c, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Somit erhalten wir die Lösung(en): $z(x) = \tan(x + C)$, $C \in \mathbb{R}$, also $y(x) = \tan(x + C) - x$, $C \in \mathbb{R}$.

(b) Wir multiplizieren beide Seiten mit $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x}$, um zu erhalten:

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-x} y'(x) - \mathrm{e}^{-x} y = \mathrm{e}^{-x} \sin x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\sin x \\ &\qquad \Rightarrow y(x) = \mathrm{e}^{x} \int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x + C\mathrm{e}^{x} \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das unbestimmte Integral wird durch partielle Integration berechnet:

$$\int \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x),$$

somit erhalten wir die Losung(en): $y(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + C\mathrm{e}^{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

(c) Wir sehen, dass die konstanten Funktionen $y \equiv 1$ und $y \equiv -1$ Lösungen der DGl sind. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\Rightarrow \arcsin y = \arcsin x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Lösung(en):

$$y(x) = 1, \qquad y(x) = -1, \qquad y(x) = \sin\left(\arcsin x + C\right), C \in \mathbb{R}.$$

Die nicht konstanten Lösungen können äquivalent als $y(x) = x \cos C + (\sqrt{1-x^2}) \sin C$ geschrieben werden.

(d) Wir sehen, dass die konstante Funktion $y \equiv -1$ Lösung der DGl ist. Jetzt suchen wir die nicht konstanten Lösungen. Durch Trennung den Variablen erhalten wir:

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+y)x^2 \Rightarrow \int \frac{y}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int x^2 \, \mathrm{d}x \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) \mathrm{d}y = \int x^2 \, \mathrm{d}x,$$

somit erhalten wir die implizite Relation für die nicht konstanten Lösungen der DGl:

$$y - \log|1+y| = \frac{x^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

13.4. Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

(a) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2$; seine Wurzeln sind 1 und -2, somit ist die allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - 4\lambda$; seine Wurzeln sind 0 und 4, somit ist die allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - \lambda + 1$; seine Wurzeln sind $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$, somit ist die allgemeine Lösung:

$$y(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda^2 + 1)$$

und die Nullstellen sind

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = i, \quad \text{und} \quad \lambda_4 = -i.$$

Damit ist die allg. Lösung:

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} + c_3 \cos(x) + c_4 \sin(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

(e) Wir integrieren die DGl viermal:

$$\begin{aligned}
&y^{(4)}(t) = -1 \\
\Rightarrow &y^{(3)}(t) = -t + c_1 \\
\Rightarrow &y^{(2)}(t) = -\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \\
\Rightarrow &y^{(1)}(t) = -\frac{t^3}{3!} + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3 \\
\Rightarrow &y(t) = -\frac{t^4}{4!} + c_1 \frac{t^3}{3!} + c_2 \frac{t^2}{2!} + c_3 t + c_4, \quad c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(f) Das characteristische Polynom ist:

$$\lambda^4 + 1 = (\lambda^2 + i)(\lambda^2 - i),$$

also sind seine Wurzeln $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ und $\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, somit ist die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) = {} & \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_2\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right) \\ & + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(c_3\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + c_4\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right) \qquad c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

13.5. Nebenbedingungen Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega.$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$x_{all}(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(a) Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 2\omega$ folgt:

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = C_1 = 1, \\ \dot{x}(0) = 2\omega \quad &\Rightarrow \quad -C_1\omega\sin(0) + C_2\omega\cos(0) = C_2\omega = 2\omega. \end{aligned}$$

Somit gilt $C_1 = 1$ und $C_2 = 2$. Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \cos(\omega t) + 2\sin(\omega t).$$

(b) Mit den Randbedingungen $x(0) = 1$ und $x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} x(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1\cos(0) + C_2\sin(0) = C_1 = 1, \\ x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1 \quad &\Rightarrow \quad C_1\cos(\frac{\pi}{2}) + C_2\sin(\frac{\pi}{2}) = C_2 = 1. \end{aligned}$$

Somit gilt $C_1 = C_2 = 1$. Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$