14.1. Inhomogene Lineare Differentialgleichungen Das charakteristische Polynom der homogenen DGl $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ist $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2$. Seine Wurzeln sind $\pm i$ und jede hat Vielfachheit 2. Somit ist die allgemeine Lösung:

$$y_h(x) = A \sin x + B \cos x + Cx \sin x + Dx \cos x, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Um die Inhomogene DGl zu lösen, müssen wir partikuläre Lösungen finden.

(a) Wir machen den Ansatz:

$$y_p(x) = ax^2 \sin x + bx^2 \cos x,$$

wobei die Koeffizienten a und b so festzulegen sind, dass y_p die DGl erfüllt. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= -ax^2 \sin x - bx^2 \cos x + 4ax \cos x - 4bx \sin x + 2a \sin x + 2b \cos x, \\ y_p^{(4)}(x) &= ax^2 \sin x + bx^2 \cos x - 8ax \cos x - 8bx \sin x - 12a \sin x - 12b \cos x. \end{aligned}$$

Führen wir jetzt in:

$$y_p^{(4)} + 2y_p'' + y_p = (-8a) \sin x + (-8b) \cos x \overset{!}{=} \sin x$$

den Koeffizientenvergleich durch, so folgt $a = -\frac{1}{8}$, $b = 0$. Die allgemeine Lösung lautet demnach:

$$\begin{aligned} y_a(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= A \sin x + B \cos x + Cx \sin x + Dx \cos x - \frac{x^2}{8} \sin x, \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Wir machen den Ansatz:

$$y_p(x) = a\mathrm{e}^{2x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Führen wir jetzt in:

$$y_p^{(4)} + 2y_p'' + y_p = 25a\mathrm{e}^{2x} \overset{!}{=} \mathrm{e}^{2x}$$

den Koeffizientenvergleich durch, so folgt $a = -\frac{1}{25}$. Die allgemeine Lösung lautet demnach:

$$\begin{aligned} y_a(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= A \sin x + B \cos x + Cx \sin x + Dx \cos x + \frac{1}{25}\mathrm{e}^{2x}, \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Nach dem Superpositionsprinzip und den obigen Ergebnissen erhalten wir sofort, dass die Allgemeine Lösung :

$$\begin{aligned} y_a(x) &= y_{(\mathbf{a})}(x) + y_{(\mathbf{b})}(x) \\ &= A\sin x + B\cos x + Cx\sin x + Dx\cos x - \frac{x^2}{8}\sin x + \frac{1}{25}\mathrm{e}^{2x}, \\ A, B, C, D &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist.

14.2.

(a)

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \cdot (\underbrace{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=-1}) + (\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) \\ &= \frac{2+2i-3i+3}{4+9} \cdot (-i) + i = \frac{-1-5i}{13} + i = -\frac{1}{13} + \frac{8}{13}i. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} z &= (2+i)(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}) + \frac{(i-1)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \cdot (\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + i \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}) \\ &= 2i - 1 - i \cdot \frac{2i-2+1+i}{4+1} = 2i - 1 - i \cdot \frac{3i-1}{5} \\ &= 2i - 1 + \frac{3+i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i. \end{aligned}$$

14.3.

(a) Mit Hilfe der Reihenentwicklung von e^x und $\sin x$ erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^{-2} + O(n^{-3})}{1 - n(n^{-1} - \frac{1}{6}n^{-3} + O(n^{-5}))} = \frac{1/2}{1/6} = 3.$$

(b) Die Taylorreihe von $\sqrt{1+x}$ ist $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2+n} &= \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{1}{2}n^{-3} - O(n^{-6}) - 1 - \frac{1}{2}n^{-1} + O(n^{-2})\right)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Beh. 1: $a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
$n = 1$: $a_1 = 1 \leq 2$.
Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Nach Induktionsannahme: $a_n \leq 2 \implies a_n + 1 = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} < 2$. Dies zeigt Behauptung 1.

Beh. 2:(a_n) ist monoton wachsend, d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
Verankerung: $a_1 = 1 \leq \sqrt{1+1} = a_2$
Induktionsschritt: $n \to n+1$:
Da nach Ind.annahme $a_n \leq a_{n+1}$ ist, folgt

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Dies zeigt Behauptung 2.

Da jede nach oben beschränkte, monoton wachsende Folge, konvergent ist, konvergiert $a_n \to a \in \mathbb{R}$, für ein a das wir noch bestimmen müssen.

Falls a der Grenzwert der Folge ist, muss a unter der Rekursionsvorschrift fest bleiben, d.h.

$$a = \sqrt{1+a}.$$

Somit gilt $a^2 = 1 + a \iff a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $a_n \geq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$ muss auch der Grenzwert $a \geq 0$ sein und damit ist

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(d) Das n-te Folgenglied ist gegeben durch $a_n = 2^{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}}$ und für die geometrische Summe gilt $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}} = 2^{\frac{1}{1-1/2}} = 2^2 = 4.$$

14.4.

(a) Wir bemerken $|\sin(n)| < 1$ für alle $n \geq 1$. Es folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Die Reihe konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

(b) Aus Aufgabe 1b) wissen wir, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2} \neq 0$. Also ist die Folge (a_n) keine Nullfolge und somit konvergiert die Reihe nicht.

(c) Die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^{2015}}$ ist nicht negativ und monoton fallend. Nach dem Integraltest konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}$ genau dann, wenn das Integral $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ konvergiert.

Das Integral konvergiert, denn es ist:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2015}}\, dx = -\frac{1}{2014} x^{-2014} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2014}.$$

Somit konvergiert auch die Reihe.

14.5.

(a) *Behauptung 1:* Die Folge ist monoton wachsend.
Beweis: Durch Induktion nach n:
Verankerung: $1 = d_1 < \sqrt{5} = d_2$.
Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} > \sqrt{2d_{n-1} + 3} = d_n$. Behauptung 1 ist also bewiesen.

Behauptung 2: Die Folge ist nach oben durch 3 beschränkt.
Beweis: Durch Induktion nach n:
Verankerung: $d_1 = 1 \leq 3$.
Ind.Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{2d_n + 3} \leq \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$. Behauptung 2 ist also auch gezeigt.

Nach dem Satz über monotone Konvergenz konvergiert jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge. Also konvergiert $d_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

Der Grenzwert d muss die Gleichung $d = \sqrt{2d + 3} \iff d^2 - 2d - 3 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}.$$

Da die Folge monoton wachsend ist und $d_1 = 1 > -1$ ist, folgt $d \neq -1$. Somit ist der Grenzwert $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 3$.

(b) Offensichtlich ist die Folge von unten durch 0 beschränkt.
Behauptung 1: Die Folge ist monoton fallend.
Beweis: Durch Induktion nach n:

Verankerung: $d_2 = \sqrt{9-2} = \sqrt{7} < 3 = d_1$.
Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \leq \sqrt{3d_{n-1} - 2} = d_n$.
Damit ist Behauptung 1 gezeigt.

Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, konvergiert nach dem Satz über monotone Konvergenz. Also konvergiert $d_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} d \in \mathbb{R}$.

Der Grenzwert muss die Gleichung $d = \sqrt{3d-2} \iff d^2 - 3d + 2 = 0$ erfüllen (da $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist). Diese Gleichung hat die Lösungen

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} .$$

Behauptung 2: Für jedes $n \geq 1$ gilt $d_n \geq 2$.
Beweis: Durch Induktion nach n:

Verankerung: $d_1 = 3 > 2$.
Ind. Schritt: $d_{n+1} = \sqrt{3d_n - 2} \geq \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2$.
Somit ist auch Behauptung 2 gezeigt.

Also ist $d \neq 1$ und es folgt $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 2$.

14.6.

(a) Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \sqrt{1-x^2} \\
F''(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\
F'''(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x^2}{2(1-x)^{3/2}} = -\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \underbrace{F(0)}_{=0} + 1 \cdot x - 0 - \frac{1}{6}x^3 - \dots \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 - \dots .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ also } \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Da die Taylorreihe auf ihrem Konvergenzbereich gleichmässig konvergiert können wir gliedweise integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.\end{aligned}$$

14.7.

Damit $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, muss gelten $\forall x \in [2,4] : 2rx - x^2 \geq 0$. Dies ist äquivalent zu $\forall x \in [2,4] : 2r > x$. Notwendige Bedingung ist also $2r \geq 4$, das heisst, $r \geq 2$. f ist auf $[0,4] \setminus \{2\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Die Bedingung für Stetigkeit auf $[0,4]$ ist daher

$$\lim_{2>x\to 2} f(x) = f(2) = \lim_{2<x\to 2} f(x).$$

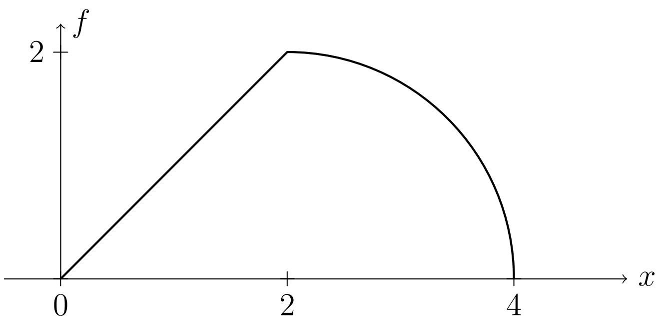
Es gilt

$$\begin{aligned}&\lim_{2>x\to 2} f(x) = \lim_{2>x\to 2} 2x\,r^{-1} = 4r^{-1}, \\ &\lim_{2<x\to 2} f(x) = \lim_{2<x\to 2} \sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{4r-4} = 2\sqrt{r-1}.\end{aligned}$$

Die Bedinung lautet also $4r^{-1} = 2\sqrt{r-1}$. Wegen $r \geq 2$ ist dies äquivalent zu $4 = r^2(r-1)$. Wir sehen, dass $r = 2$ die eine gültige Lösung ist. Somit ist f stetig für $r = 2$. Um den Graphen von f zu zeichnen, beobachten wir, dass der Graph von

$$\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$$

Teil des Kreises mit Radius r um den Punkt $(r,0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Für $r = 2$ erhalten wir:



14.8. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ gilt

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2ax - a}{|x-a| + |x^2 - a^2|} = \frac{x - a + 2x(x-a)}{|x-a| + |(x-a)(x+a)|} = \frac{(x-a)(1+2x)}{|x-a|\big(1 + |x+a|\big)}.$$

Für $x > a$ ist $|x-a| = (x-a)$. Daher gilt

$$\lim_{a>x\to a} f(x) = \lim_{a>x\to a} \frac{1+2x}{1+|x+a|} = \frac{1+2a}{1+|2a|} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \geq 0, \\ \frac{1+2a}{1-2a}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Für $x < a$ ist $|x-a| = -(x-a)$. Somit gilt

$$\lim_{a<x\to a} f(x) = \lim_{a>x\to a} -\frac{1+2x}{1+|x+a|} = -\frac{1+2a}{1+|2a|} = \begin{cases} -1, & \text{falls } a \geq 0, \\ -\frac{1+2a}{1-2a}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Im Fall $a \geq 0$, da $1 \neq -1$ sehen wir sofort, dass f an $x_0 = a$ nicht stetig ergänzbar ist.

Im Fall $a < 0$ ist f an $x_0 = a$ stetig ergänzbar, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, das heisst, falls $\frac{1+2a}{1-2a} = -\frac{1+2a}{1-2a}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1+2a}{1-2a} = 0$, also falls $a = -\frac{1}{2}$.

14.9. Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$. Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

Mit der Regel $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Die ersten beiden Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+e^{2x}}\cdot 2e^{2x}+\frac{1}{1+(e^x)^2}\cdot e^x \;=\; \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}, \\ f''(x) &= \frac{(2e^{2x}+e^x)(1+e^{2x})-(e^{2x}+e^x)2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{2e^{2x}+2e^{4x}+e^x+e^{3x}-2e^{4x}-2e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\cdot(-e^{2x}+2e^x+1). \end{aligned}$$

Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist

$$f'(x)=\frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}>0,$$

und daraus folgt, dass f keine kritische Punkte besitzt, insbesondere also keine lokalen Extrema. Da f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, folgt weiter, dass f auch keine globalen Extrema besitzt.

Ausserdem ist für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}\big(f''(x)\big) &= \operatorname{sign}\Big(\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\cdot(-e^{2x}+2e^x+1)\Big) \\ &= \underbrace{\operatorname{sign}\left(\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\right)}_{=1}\cdot\operatorname{sign}\left(-e^{2x}+2e^x+1\right) \\ &= \operatorname{sign}\big(-e^{2x}+2e^x+1\big). \end{aligned}$$

Indem wir $y:=e^x$ setzen, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(f''(x)) &= \operatorname{sign}\big(-y^2+2y+1\big) \\ &= \operatorname{sign}\big(2-(y-1)^2\big) \\ &= \operatorname{sign}\left((\sqrt{2}+1-y)(\sqrt{2}-1+y)\right) \\ &= \operatorname{sign}\left((\sqrt{2}+1-e^x)\right)\cdot\underbrace{\operatorname{sign}\left(\sqrt{2}-1+e^x\right)}_{=1} \\ &= \operatorname{sign}(\sqrt{2}+1-e^x). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\operatorname{sign}\big(f''(x)\big) = \begin{cases} +1 & \text{für} \quad x < \log(1+\sqrt{2}) \\ 0 & \text{für} \quad x = \log(1+\sqrt{2}) \\ -1 & \text{für} \quad x > \log(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

Die Funktion f ist also konvex für $x < \log(1+\sqrt{2})$ und konkav für $x > \log(1+\sqrt{2})$. Im Punkt $x = \log(1+\sqrt{2})$ selbst ändert f'' das Vorzeichen, daher besitzt f dort einen Wendepunkt.

Zuletzt betrachten wir noch das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\Big(\log(1+e^{2x})\Big) + \arctan(e^x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\log(1) + \arctan(0) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\Big(\log(1+e^{2x})\Big) + \arctan(e^x)\right) = \infty.$$

14.10.

(a) Da f_n gleichmässig gegen f konvergieren, haben wir nach Definition $\lim_{n\to\infty}\sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0$. Daraus folgt, dass ein N_1 existiert, so dass $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \epsilon/2$ für alle $n > N_1$.
Aus der Stetigkeit von f folgt sofort, dass es ein N_2 existiert, so dass $|f(x_n) - f(x)| < \epsilon/2$ für alle $n > N_2$.
Daraus folgt für alle $n > \max(N_1, N_2)$, dass

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 \leq \epsilon.$$

gilt.

(b) Nein, die punktweise Konvergenz reicht nicht. Ein Gegenbeispiel ist

$$f_n(x) := \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x < \frac{1}{2n}, \\ 2 - 2nx, & \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

mit $x_n = \frac{1}{2n}$ und $f = 0$. Dann folgt $|f_n(x_n) - f(0)| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

14.11.

(a) Nach Stetigkeit gilt $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x}{1+x})x}$. Da

$$\lim_{x\to\infty} \ln(\frac{x}{1+x})x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{x}{1+x})}{1/x}$$

Man sieht leicht, dass es sich um eine unbestimmte Form des Typs $\frac{0}{0}$ handelt, auf die man L' Hospitals Regel anwenden kann.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{x}{1+x})}{1/x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x}\frac{1+x-x}{(1+x)^2}}{-1/x^2} = -1.$$

Somit folgt folgt, dass $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

(b) Da

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\text{B. d H.}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1/2,$$

folgt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x(1-\cos x)}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (a+bx)}{x^2}$$

Da $\cos(x) - (a+bx)$ für $x = 0$ der Wert $1 - a$ besitzt, kann der obige Limes nur für $a = 1$ existieren.

Man sieht leicht, dass es sich um eine unbestimmte Form des Typs $\frac{0}{0}$ handelt, auf die man L' Hospitals Regel anwenden kann. Somit haben wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (1 + bx)}{x^2} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - b}{2x}.$$

Da $-\sin(x) - b$ für $x = 0$ der Wert $-b$ besitzt, kann der obige Limes nur für $b = 0$ existieren.

Somit haben wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} \overset{\text{B. d H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

14.12.

(a) s_n ist für $n \geq 0$ monoton wachsend und beschränkt, weil

$$\begin{aligned}
|s_n| &\leq \sum_{j=0}^{n} \left| \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2} \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 1}{2^j (j+1)^2} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2
\end{aligned}$$

gilt. Somit konvergiert die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Nach dem Minorantenkriterium divergiert die Reihe, weil die harmonische Reihe divergiert.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n} + n + 1} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n} + 2)n} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 2} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2} \\
&\geq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} |a_n| &= |\sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}| \\ &= |\sin(n)| \cdot |\frac{2n-1}{(n+1)^2}| \\ &\leq |\frac{2+\frac{1}{n}}{n+2+\frac{1}{n}}| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \ . \end{aligned}$$

Somit konvergiert a_n gegen 0.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Es gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1} \geq \frac{\sqrt{n}-1}{n\sqrt{n}+n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} \\ &\geq \frac{1}{2n} \ , \end{aligned}$$

für $n \geq 9$.

Es ist bekannt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ divergiert, insbesodere divergiert auch die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Nach Minoranten / Majorantenkriterium / Cauchy-Kriterium divergiert somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Somit ist die Reihe konvergent.

(e) Konvergenzradius ist

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+4}}{4} = \frac{1}{4}$$

Also Konvergenz in $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, Divergenz für $|x| > \frac{1}{4}$.

Randpunkte: $x = \pm\frac{1}{4}$ einzeln untersuchen.

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{divergent, da es harmonische Reihe ist}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sum_n a_n x^n = \sum_n (-1)^n \frac{1}{n+4} \Rightarrow \text{konvergent, da alternierende harmonische Reihe}$$

14.13.

(a)

$$f(x) = 2x^{x^2} = 2(e^{\log(x)})^{x^2} = 2e^{x^2 \cdot \log(x)}$$

also

$$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2 \log(x)} \cdot (x^2 \log(x))' = 2x^{x^2}(2x \cdot \log(x) + x)$$

Da $f(1) = 2$ ist $f^{-1}(2) = 1$ und (Umkehrsatz)

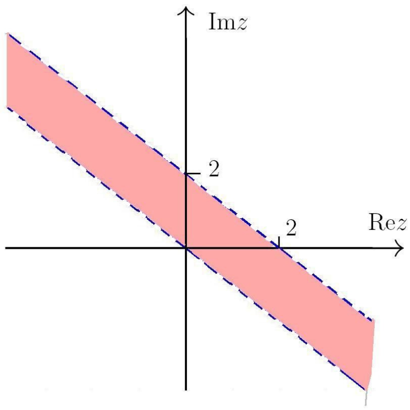
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

(b) $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \Rightarrow$ für $z = x + iy$:

$$(x+iy)e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + i(x+y))$$

Also ist Bedingung

$$0 < \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) < \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x + y < 2 \Leftrightarrow -x < y < 2 - x$$



(c) Für $f(t) = \sqrt[3]{t} = t^{1/3}$ ist $f'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}$. $\Rightarrow$ Lineares Taylorpolynom um $t_0 = 8$:

$$P_1 f(t) = f(8) + f'(8)(t-8) = 2 + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^2 \cdot (t-8)$$

Also Näherung für $\sqrt[3]{7}$:

$$P_1(7) = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$$

Fehlerabschätzung:

$$\text{Restglied} = \frac{f''(\xi)}{2!}(t-t_0)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}(7-8)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}$$

für ein $\xi \in [7,8]$.

Aus $f''(t) = -\frac{2}{9}t^{-5/3}$

$$\Rightarrow |\text{Fehler}| \leq \frac{1}{2} \sup_{\xi\in[7,8]} |f''(\xi)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7^{5/3}} = \frac{1}{9\cdot 7^{5/3}}.$$

14.14.

(a) Zweimal partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) + 3\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\cos(6x)}_{\downarrow}\,dx \\ &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2}\cos(6x) - 9\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx\ .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}10\int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx &= -\frac{e^{-2x}}{2}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{2}\cos(6x) + c \\ \int \underbrace{e^{-2x}}_{\uparrow}\underbrace{\sin(6x)}_{\downarrow}\,dx &= -\frac{e^{-2x}}{20}\sin(6x) - \frac{3e^{-2x}}{20}\cos(6x) + \tilde{c}\ .\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $\sqrt{x-1} = u$, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx = du$ folgt es

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{u^2+1}du \\ &= [2\arctan u]\,\big|_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}\ .\end{aligned}$$

(c) Variante 1:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{3x^2-2x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx - \int \frac{5x}{x^3-x^2-2x}\,dx \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx\ .\end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{1}{x^2-x-2}$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B = 0\ , \\ -2A+B = 1\ . \end{cases}$$

Daraus ergibt sich $A=\frac{-1}{3}$ und $B=\frac{1}{3}$.

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - 5\left[\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx\right] \\ &= \ln(|x^3-x^2-2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c\ .\end{aligned}$$

Variante 2: Direkt mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}\ .$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A+B+C = 3\ , \\ -A+B-2C = -7\ , \\ -2A = -2\ . \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung folgt sofort, dass $A=1$. Das System reduziert sich auf $\begin{cases} B+C = 2\ , \\ B-2C = -6\ , \end{cases}$ die $B=2-C$ impliziert. Somit folgt $2-C-2C=-6 \quad \Rightarrow$ $C=\frac{8}{3}, B=\frac{-2}{3}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{8}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c\ .\end{aligned}$$

Bemerkung: Variante 1 und 2 ergeben das gleiche Resultat, weil es gilt

$$\begin{aligned}
& \ln(|x^3 - x^2 - 2x|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c = \\
= \; & \ln(|x| \cdot |x-2| \cdot |x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\
= \; & \ln(|x|) + \ln(|x-2|) + \ln(|x+1|) - \frac{5}{3}\ln(|x-2|) + \frac{5}{3}\ln(|x+1|) + c \\
= \; & \ln(|x|) - \frac{2}{3}\ln(|x-2|) + \frac{8}{3}\ln(|x+1|) + c\,.
\end{aligned}$$

14.15.

(a) $g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\, dt$.
Sei $F(t)$ eine Stammfunktion von $\frac{\cosh(t)}{t^2}$, d.h. $F'(t) = \frac{\cosh(t)}{t^2}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$g(x) = F(3x) - F(1).$$

Daraus folgt:

$$g'(x) = F'(3x) \cdot 3 = 3\frac{\cosh(3x)}{(3x)^2} = \frac{\cosh(3x)}{3x^2}\;.$$

(b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx$.
Da $0 \le \frac{1}{x^2+x} \le \frac{1}{x^2}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \left(1 - \frac{1}{R}\right) = 1$ konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium, dass auch $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx$ konvergiert.
Benutze die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \\
\Rightarrow 1 &= A(x+1) + Bx \\
\Rightarrow A &= 1 \text{ und } B = -1, \text{ d.h. } \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{1}{x^2+x} dx &= \int_0^R \frac{1}{x} dx - \int_0^R \frac{1}{x+1} dx \\
&= \log(|x|)\big|_1^R - \log(|x+1|)\big|_1^R \\
&= \log(R) - \log(R+1) + \log(2) \\
&= \log\left(\frac{R}{R+1}\right) + \log(2) \overset{R\to\infty}{\to} \log(1) + \log(2) = \log(2).
\end{aligned}$$

Also $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx = \log(2)$ konvergiert.

14.16.

(a)

$$y''' - 4y'' + 6y' = 0.$$

Char. Polynom:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \rightsquigarrow \lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$
$\Longrightarrow \lambda_{2,3} = \frac{4\pm\sqrt{16-24}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{2} = 2 + i\sqrt{2}.$
Allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 + e^{2t}(C_2 \sin(\sqrt{2}t) + C_3 \cos(\sqrt{2}t)).$$

- $y(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} C_1$, also $C_1 \overset{!}{=} 0$.
- $y'(t) = 2e^{2t}(C_2 \sin(\sqrt{2}t) + C_3 \cos(\sqrt{2}t)) + \sqrt{2}e^{2t}(C_2 \cos(\sqrt{2}t) - C_3 \sin(\sqrt{2}t)).$
  $y'(0) = 2C_3 + C_2\sqrt{2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\sqrt{2}C_3.$
  $y(t) = Ce^{2t}(-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{2}t)).$

(b) Die homogene Lösung ist aus a) bekannt.

- <u>Ansatz für e^t:</u> $y_1(t) = ae^{2t}$
  $\Longrightarrow y_1' = 2ae^{2t}, \quad y_1'' = 4ae^{2t}, \quad y_1''' = 8ae^{2t}$. Einsetzen:

  $$(8a - 16a + 12a)e^{2t} \overset{!}{=} e^{2t}.$$

  $\Rightarrow a = \frac{1}{4} \Rightarrow y_1(t) = \frac{1}{4}e^{2t}.$
- <u>Ansatz für $9t^2$:</u> $\lambda = 0$ ist eine Nullstelle des Char. Polynoms (siehe a)).
  $\Rightarrow y_2(t) = at^3 + bt^2 + ct.$
  $\Rightarrow y_2'(t) = 3at^2 + 2bt + c, \Rightarrow y_2''(t) = 6at + 2b$ und $\Rightarrow y_2'''(t) = 6a.$
  Einsetzen:

  $$\begin{aligned} 6a - 4(6at + 2b) + 6(3at^2 + 2bt + c) &\overset{!}{=} 9t^2 \\ 18at^2 + t(-24a + 12b) + 6a - 8b + 6c &\overset{!}{=} 9t^2. \end{aligned}$$

  Koeffizientenvergleich: $18a = 9 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$
  $-24a + 12b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2a = 1.$
  $6a - 8b + 6c = 0 \quad \Rightarrow \quad 6c = 8b - 6a = 8 - 3 = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{6}.$
  $\Longrightarrow y_2(t) = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + \frac{5}{6}t.$

Nach dem Superpositionsprinzip (bzw. da die Dgl. linear ist), ist

$$y_p(t) = y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}t^3 + t^2 + \frac{5}{6}t$$

eine partikuläre Lösung.

(c) Separierbare Dgl.:

$$\begin{aligned}
y &= 2t^2 y' \\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{2t^2} \\
\log(|y|) &= -\frac{1}{2t} + c \\
|y| &= e^{-\frac{1}{2t}+c} = Ke^{-\frac{1}{2t}}, \qquad K := e^c \in \mathbb{R}_+ \\
y &= Ke^{-\frac{1}{2t}}, \qquad K := e^c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

<u>Anfangsbedingungen:</u> Da $y(1) = Ke^{-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow K = e^{\frac{1}{2}}$.
Somit ist die Lösung:

$$y(t) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t}.$$

14.17.

(a) Wir bestimmen wie immer zuerst die Lösung der zugehörigen homogenen Diff'gleichung

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4) \cdot (\lambda + 1)$$

und die Nullstellen $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$.
Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_H(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t}.$$

Für das Bestimmen einer partikulären Lösung teilen wir das Problem in 2 Schritte auf:
1. Bestimme $y_1(t)$ mit

$$\ddot{y_1}(t) - 3\dot{y_1}(t) - 4y_1(t) = t$$

2. Bestimme $y_2(t)$ mit

$$\ddot{y_2}(t) - 3\dot{y_2}(t) - 4y_2(t) = te^{-2t}$$

Dann gilt nach dem Superpositionsprinzip (die Gleichung ist linear!), dass

$$y_P = y_1 + y_2$$

eine Lösung der ursprünglichen Diff'gleichung ist.
Bestimmen von y_1:

Da $\lambda = 0$ keine Nullstelle vom charakteristischen Polynom ist, verwenden wir als Ansatz ein allgemeines Polynom 1. Ordnung

$$y_1(t) = at + b, \qquad \Rightarrow \dot{y_1}(t) = a, \quad \ddot{y_1}(t) = 0.$$

Einsetzen ergibt

$$\ddot{y_1} - 3\dot{y_1} - 4y_1 = 0 - 3 \cdot a - 4 \cdot (at + b) = t \cdot (-4a) - 3a - 4b \stackrel{!}{=} t$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Bedingungen

$$-4a = 1 \text{ und } -3a - 4b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, \quad b = -\frac{3}{4}a = +\frac{3}{16}$$

und

$$y_1(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16}.$$

Besimmen von y_2:
Die Funktion $t \cdot e^{-2t}$ hat die Form "(Polynom 1. Grad) $\cdot e^{-2t}$" und wir verwenden den Ansatz ($\lambda = -2$ ist keine Nullstelle des char. Polynoms)

$$y_2(t) = (a + bt) \cdot e^{-2t}.$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{y_2}(t) &= b \cdot e^{-2t} - 2(a + bt) \cdot e^{-2t} \\ \ddot{y_2}(t) &= -4be^{-2t} + 4(a + bt)e^{-2t} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung ergibt dies

$$\begin{aligned} \ddot{y_2} - 3\dot{y_2} - 4y_2 &= -4be^{-2t} + 4(a + bt)e^{-2t} - 3b \cdot e^{-2t} + 6(a + bt) \cdot e^{-2t} \\ &\quad -4(a + bt)e^{-2t} \\ &= -7be^{-2t} + 6(a + bt)e^{-2t} \\ &= 6b \cdot te^{-2t} + (6a - 7b)e^{-2t} \stackrel{!}{=} te^{-2t} \end{aligned}$$

Also ist

$$b = \frac{1}{6}, \quad a = \frac{7b}{6} = \frac{7}{36}$$

und daher

$$y_2(t) = \left(\frac{1}{6}t + \frac{7}{36}\right) \cdot e^{-2t}.$$

Insgesamt erhalten wir die partikuläre Lösung

$$y_P(t) = \left(\frac{1}{6}t + \frac{7}{36}\right) \cdot e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$$

und die allgemeine Lösung des Problems ist

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 \cdot e^{4t} + c_2 \cdot e^{-t} + \left(\frac{1}{6}t + \frac{7}{36}\right) \cdot e^{-2t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16}.$$

(b) Wir berechnen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_h(x) = Ae^t + Be^{-t}.$$

Die Inhomogenität ist von der Form $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Da ± 1 Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, wird die Lösung der homogenen Gleichung von der Form $cte^t + dte^{-t}$ sein. Die Rechnung wird jedoch einfacher, wenn wir den äquivalenten Ansatz

$$y_p(t) = t(a\cosh t + b\sinh t),$$

machen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= t(a\cosh t + b\sinh t), \\
y_p'(t) &= a\cosh t + b\sinh t + t(a\sinh t + b\cosh t), \\
y_p''(t) &= a\sinh t + b\cosh t + a\sinh t + b\cosh t + t(a\cosh t + b\sinh t) \\
&= 2a\sinh t + 2b\cosh t + t(a\cosh t + b\sinh t), \\
y_p'' - y_p &= 2a\sinh t + 2b\cosh t \stackrel{!}{=} \cosh t.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird gelöst durch $a = 0$ und $b = \frac{1}{2}$, und eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist daher $y_p(t) = \frac{1}{2}t\sinh t$
Die allgemeine Lösung ist folglich gegeben durch

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^t + Be^{-t} + \frac{1}{2}t\sinh t$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\begin{aligned}
y(0) &= A + B \stackrel{!}{=} 1, \\
y'(t) &= Ae^t - Be^{-t} + \frac{1}{2}\sinh t + \frac{1}{2}t\cosh t, \\
y'(0) &= A - B \stackrel{!}{=} -1,
\end{aligned}$$

und wir erhalten $A = 0$ und $B = 1$ und damit die Lösung

$$y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}t\sinh t$$

14.18. Gesucht ist das globale Minimum der Funktion

$$f : (0,10) \to \mathbb{R}_+ \ , \ f(x) = C\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(10-x)^2}\right)$$

wobei $C > 0$ eine Konstante ist.
Wir suchen Extremalstellen der Funktion f:

$$f'(x) = 0\,,\;\; x \in (0,10) \Longleftrightarrow 2C\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{4}{(10-x)^3}\right) = 0\,,\;\; C > 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{(10-x)^3} = 0 \Longleftrightarrow (10-x)^3 = 4x^3 \qquad (1)$$

Wir suchen eine Lösung x_0 von (1):

$$(10-x_0)^3 = 4x_0^3\,,\;\; x_0 \in (0,10) \Longleftrightarrow 10 - x_0 = \sqrt[3]{4}x_0 \Longleftrightarrow \qquad (2)$$

$$x_0 = \frac{10}{1+\sqrt[3]{4}}$$

ist eine Lösung von (1).
Wir beweisen die beiden Aussagen:
(a) Für $0 < x < x_0$ gilt $f'(x) < 0$, d.h f ist monoton fallend auf $(0, x_0)$.
(b) Für $x_0 < x < 10$ gilt $f'(x) > 0$, d.h f ist monoton steigend auf $(x_0, 10)$.
Diese Aussagen zeigen, dass x_0 die einzige Extremalstelle in $(0,10)$ ist und $f(x_0)$ das globale Minimum von f ist.
Beweis:
(a) $0 < x < x_0 \Longrightarrow 10-x > 10-x_0 \Longrightarrow (10-x)^3 > (10-x_0)^3 \Longrightarrow \frac{4}{(10-x)^3} < \frac{4}{(10-x_0)^3}$
und $0 < x < x_0 \Longrightarrow \frac{1}{x^3} > \frac{1}{x_0^3} \Longrightarrow -\frac{1}{x^3} < -\frac{1}{x_0^3}$
Damit folgt:

$$0 < x < x_0 \Longrightarrow f'(x) = 2C\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{4}{(10-x)^3}\right) < 2C\left(-\frac{1}{x_0^3} + \frac{4}{(10-x_0)^3}\right) \overset{(2)}{=} 0$$

(b) Wir gehen analog vor wie in (a):

$$x_0 < x < 10 \Longrightarrow \frac{4}{(10-x)^3} > \frac{4}{(10-x_0)^3}$$

und

$$-\frac{1}{x^3} > -\frac{1}{x_0^3}$$

Damit folgt $x_0 < x < 10 \Longrightarrow f'(x) > 0$.
Der dunkelste Punkt befindet sich also bei $x_0 = \frac{10}{1+\sqrt[3]{4}}$.

14.19. Wenn alle Ereignisse gleichwahrscheinlich sind haben wir:

$$p_k = 1/n \quad \text{für } 1 \leq k \leq n$$

mit der Entropie:

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -\log \frac{1}{n} = \log n.$$

Wir müssen also zeigen, dass für beliebige $p_k > 0$ mit $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ gilt:

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \leq \log n.$$

Wir benutzen, dass $f(x) := -\log(x)$ konvex auf $(0, \infty)$ ist, da $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \, \forall x > 0$.
Deshalb gilt die Jensensche Ungleichung:

$$f(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k), \quad x_k > 0 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Wir wählen $x_k := \frac{1}{p_k}$ und bekommen

$$-\log(n) = -\log(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p_k(-\log x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k.$$