1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$ Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Menge $S \subset \mathbb{R}$ und sei $\beta \in \mathbb{R}$ ihr Infimum. Dann sicherlich:

- ☐ existiert $x \in S$ so dass $x < \beta + \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$;
- ☐ die Menge $(\beta, \beta + 1) \cap S$ ist nicht leer;
- ☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert $x \in S$ so dass $\beta \leq x < \beta + \epsilon$.

(b) Sei S eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Infimum. Dann sicherlich:

- ☐ für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Minorante b von S, so dass $a < b < a + \epsilon$;
- ☐ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Minimum;
- ☐ a ist das Supremum der unteren Schranken.

(c) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass A nach oben unbeschränkt ist?

- ☐ für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt $\log(q^2 + 1) \in A$;
- ☐ für jedes $a \in A$ gilt $a \geq 10^4$;
- ☐ für jedes $a \in A$ gilt $a \geq a^2$.

1.2. (schriftlich) Bestimmung von Supremum und Infimum Bestimmen Sie das Supremum (möglich $+\infty$) und das Infimum (möglich $-\infty$) der folgenden Mengen. Welche Mengen besitzen Maximum oder Minimum?

$$M_1 = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\right\}, \qquad M_2 = \left\{\frac{|x|}{1 + |x|} : x \in \mathbb{R}\right\},$$

$$M_3 = \bigcup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \qquad M_4 = \left\{\frac{x + y}{z} : x, y > 0,\ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.3. Abrundungsfunktion Die *Abrundungsfunktion* (Eng. “Floor Function”) $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ist definiert wie folgt: für jede reelle Zahl x, ist $[x]$ die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Zum Beispiel:

$$[3] = 3, \qquad \left[\frac{1}{2}\right] = 0, \qquad [17.5] = 17, \qquad [\pi] = 3.$$

Sei jetzt $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \left\{ [\alpha n] \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

von oben beschränkt ist. Können Sie ihr Supremum bestimmen?

1.4. Komplexe Zahlen - Wiederholung Für jede der folgenden komplexen Zahlen z, finden Sie

- ihre kartesische Form $A + iB$,
- ihre Polarform $\rho\, \mathrm{e}^{i\theta}$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihr Konjugiertes $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -3, \qquad z_2 = 2i, \qquad z_3 = \frac{1+i}{1-i},$$
$$z_4 = \sqrt{3}\mathrm{e}^{i\pi/6}, \qquad z_5 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i3\pi/4},$$
$$z_6 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad z_7 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i in dem Nenner erhalten! Z.B. $1 + i$ ist OK, $1/(1 + i)$ nicht.