**2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz in $\mathbb{R}$** Wählen Sie die richtigen Antworten.

**(a)** Seien $(a_n)$, $(b_n)$ und $(c_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $c_n = a_n + b_n$. Dann:

- ☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n;$$

- ☐ falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

- ☐ falls $(a_n)$ und $(b_n)$ beschränkt sind, muss $(c_n)$ beschränkt sein.
- ☐ falls $(c_n)$ konvergiert, konvergiert wenigstens eine der Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$;

**(b)** Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann

- ☐ falls $\epsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, dann konvergiert $(a_n)$;

- ☐ falls $(a_n)$ konvergiert, ist die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ konvergent;
- ☐ falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ nach 0 konvergiert, ist $(a_n)$ konvergent;
- ☐ falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, und $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dann ist $(a_n)$ konvergent.

**(c)** Sei $a_n = \frac{1}{n^2+1}$. Dann gilt $|a_n| < 0.01$:

- ☐ sobald $n \geq 9$,
- ☐ sobald $n > 9$,
- ☐ sobald $n > 10$,
- ☐ nie, so lange $n \leq 10$.

**2.2. Teilmengen der komplexen Zahlenebene** Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$M_1 = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = -z\}, \qquad M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \bar{z} = \frac{1}{z}\right\},$$
$$M_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = 3\}, \qquad M_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = |z+1|\},$$
$$M_5 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq |z+1|\}, \qquad M_6 = \left\{z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} : \Im\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0\right\},$$
$$M_7 = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\},$$

wobei $\Im(z)$ der Imaginärtail von $z$ ist, und $a \in \mathbb{C}$ fixiert ist.

**2.3. (schriftlich) Berechnung von Folgengrenzwerten** Berechnen Sie den Grenzwert, *falls er existiert*, der folgenden Folgen:

$$a_n = \left(\frac{2-3n}{2n+1}\right)^3, \qquad b_n = \sqrt[n]{3^n + 7^n},$$
$$c_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}, \qquad d_n = 0.\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ mal}},$$
$$e_n = \frac{(-1)^{n-1} - 2}{(-1)^n - 2}, \qquad f_n = n + (-1)^n,$$
$$g_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}, \qquad h_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

**2.4. Äquivalente Bedingungen von Konvergenz** Sei $(a_n)$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Sätze äquivalent sind:

1. für jedes $\epsilon > 0$, existiert $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, so dass
$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon;$$
2. für jedes $\epsilon > 0$, hat die Menge
$$M_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : a_n \notin (a-\epsilon, a+\epsilon)\}$$
endliche Kardinalität, d.h. die Anzahl der Elemente, die $M_\epsilon$ enthält, ist endlich.