3.1. MC Frage: Häufungspunkte einer Folge Sei $(a_n)_n$ eine *beschränkte* Folge in $\mathbb{R}$, und sei H die Menge ihrer Häufungspunkte. Dann:

- ☐ gilt es immer $H \neq \emptyset$;
- ☐ H ist immer endlich;
- ☐ es ist möglich, dass H unendlich ist;
- ☐ falls $x \notin H$, existiert $\delta > 0$ so, dass $(x - \delta, x + \delta) \cap H = \emptyset$.

3.2. (schriftlich) Grenzwerte mit der Eulersche Zahl Berechnen Sie, *falls existent*, die folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$, **(b)** $\lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{1}{n}\right)^n$ für $a > 1$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, **(d)** $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$ für $x > 1$, **(f)** $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$.

3.3. Wachstumsraten Seien $x > 1$, $\alpha > 0$ fixiert. Wir betrachten, für $n \geq 1$, die wachsende Folgen:

$$n!, \quad x^n, \quad n^\alpha, \quad n^n.$$

Können Sie diese der Grösse nach sortieren, wenn n gross genug ist? Ergänzen Sie die folgende Ungleichungskette:

$$n^\alpha \leq \ldots\ldots \leq \ldots\ldots \leq \ldots\ldots \quad \forall n \geq N_0,$$

für geeignetes $N_0 \in \mathbb{N}$.

3.4. Induktive Folge

(a) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_0 = \sqrt{2},$$
$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

(i) Beweisen Sie, dass $(a_n)_n$ von oben durch 2 beschränkt ist.

(ii) Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert von $(a_n)_n$.

(b) Sei $(a_n)_n$ die Folge induktiv definiert durch:

$$a_0 = 1,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tipp: Induktive Folge untersucht man mit Induktion.

3.5. Gerade und ungerade Teilfolgen Sei $(a_n)_n$ eine Folge reellen Zahlen. Beweisen Sie, dass die folgende Sätze äquivalent sind:

(i) Es existieren $\lim_{n\to\infty} a_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1};$$

(ii) $(a_n)_n$ ist konvergent.

3.6. Konvergente Teilfolge Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die folgende Sätze äquivalent sind:

(i) $(a_n)_n$ ist konvergent;

(ii) jede Teilfolge von $(a_n)_n$ ist konvergent.