4.1. MC-Fragen: Reihen und Cauchy-Folgen Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern, d.h. $a_n \geq 0$ für jedes n. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass die Reihe divergiert?

☐ $a_n \geq 1/n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

☐ $a_n > 2^{-n}$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$;

☐ es existiert $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 1/\sqrt{n}$ für jedes $n \geq N_0$.

(b) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann

☐ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

☐ konvergiert $(x_n)_n$ gegen 0;

☐ ist x_n beschränkt.

4.2. Reihen reellen Zahlen Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Bestimmen Sie, falls existent, die Werte von (b) und (e).

4.3. Reihen mit π Euler zeigte als Erster, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bestimmen Sie die Summen der folgenden Reihen, mithilfe dieses Ergebnisses:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

4.4. (schriftlich) Reihen in $\mathbb{R}$ mit reellem Parameter Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind absolut konvergent?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2x^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x}{n+x}\right)^n$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$.

4.5. Bedingt konvergente Reihe Der *Riemannsche Umordnungssatz* besagt, dass für eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, *zu jeder beliebig vorgegebenen reellen Zahl* $\sigma \in \mathbb{R}$, eine Permutation ϕ von $\mathbb{N}$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sigma$ existiert. Insbesondere, ist falls eine Reihe konvergent — aber nicht absolut konvergent — ist, die Reihenfolge, in der man summiert, sehr wichtig.

Wir wollen ein Standardbeispiel dazu anführen. Betrachten wir die *alternierende harmonische Reihe*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Wie bekannt, ist diese Reihe konvergent, und wir nennen ihren Grenzwert s (man beweise, dass $s = \log 2$). Sortieren wir die Glieder wie folgt um:

$$\text{(P)} \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots .$$

(a) Finden Sie eine Ausdruck für diese neue Reihe, das heisst, finden Sie b_n, so dass

$$\text{(P)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent ist, und bestimmen Sie mithilfe der Summe der ursprünglichen Reihe ihren Wert.