5.1. Potenzreihen Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Potenzreihen konvergent? Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind sie absolut konvergent? Zeigen Sie deutlich den Konvergenzradius.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\pi)^n}{n^2+1}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$.

5.2. MC Frage: Konvergenzradius Sei $R_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho_1 > 0$. Betrachten Sie die Potenzreihe:

$$R_2 = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}.$$

Dann

☐ haben R_1 und R_2 den gleichen Konvergenzradius;

☐ ist der Konvergenzradius von R_2 strikt kleiner als ρ;

☐ Zu wenig Informationen: keine der Aussagen trifft zu.

5.3. (schriftlich) Grenzwerte von Funktionen Berechnen Sie folgende Grenzwerte, falls vorhanden:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2-1}}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 4^+} \frac{3}{x-4}, \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{3}{x-4}$, **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

Bestimmen sie β und γ reelle Zahlen so dass:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x^2-7x+1} - (\beta x + \gamma)\right) = 0.$$

5.4. Eigenshaften der reellen Exponentialfunktion Wir betrachten die Exponentialfunktion $x \mapsto \mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(a) falls $x > 0$, damit ist $\mathrm{Exp}(x) > 1$;

(b) Exp ist streng monoton wachsend, d.h. falls $y > x$ gilt $\operatorname{Exp}(y) > \operatorname{Exp}(x)$;

(c) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Exp}(x) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Exp}(x) = +\infty$.

5.5. MC Frage: die Komplexe Exponentialfunktion Betrachten Sie $z \mapsto \operatorname{Exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann

- ☐ falls z reell ist, ist $\operatorname{Exp}(z)$ reell.
- ☐ falls z rein imaginär ist, d.h. $z = iy$ für $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, ist $\operatorname{Exp}(z)$ immer rein imaginär;
- ☐ falls $z = x + iy$ mit $y \neq 0$, muss $\operatorname{Exp}(z)$ immer nichtverschwindenden imaginär Teil haben;
- ☐ ist Exp surjektiv, d.h. für jedes $w \in \mathbb{C}$ existiert $z \in \mathbb{C}$ so dass $\operatorname{Exp}(z) = w$;
- ☐ ist Exp injektiv, d.h. falls $\operatorname{Exp}(z_1) = \operatorname{Exp}(z_2)$, folgt $z_1 = z_2$.