

6.1. MC Fragen: Grenzwert einer Funktion Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 1$. Dann

- für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so dass, falls $0 < |x| < \delta$, gilt $|f(x) - 1| > \epsilon$;
- existieren $\epsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, so dass $|f(x_n) - 1| > \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- für jede Folge $(x_n)_n$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 1$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Bedingungen stellt sicher, dass $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pi$?

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x} = \frac{\pi}{2}$;
- Für jedes $\epsilon > 0$ existiert $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so dass $|f(2 - 1/n) - \pi| < \epsilon$ für jedes $n \geq \bar{n}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2 - 1/n) = \pi$.

6.2. Wichtige Grenzwerte Berechnen Sie mithilfe der Potenzreihendarstellung von Exp, sin und cos folgende Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$,
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

6.3. (schriftlich) Definition von Stetigkeit

(a) Bestimme die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta & \text{falls } x \leq -1, \\ (\alpha + \beta)x & \text{falls } -1 < x < 1, \\ x^2 + \alpha x - \beta & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$$

stetig auf ganz \mathbb{R} wird und skizziere ihren Graph.

(b) Bestimme die Konstanten c und d so, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{falls } x < 0, \\ cx + d & \text{falls } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x+8} & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

stetig auf ganz \mathbb{R} wird und skizziere ihren Graph.

(c) An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ (1-x) & \text{sonst,} \end{cases}$$

stetig?

6.4. Zwischenwertsatz

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $x \in [0, 1]$ derart, dass $f(x) = x$ gilt.

(c) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Zeigen sie dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, \frac{n-1}{n}]$ existiert, so dass $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.