Bemerkungen

Variablenwechsel in Grenzwerte. Mit den Eigenschaften stetigen Funktionen ist es möglich, viele Grenzwerte durch einen Variablenwechsel zu berechnen. Hier ist ein Beispiel: wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

berechnen. Bekanntlich ist $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, also ist die Funktion $f(y) = \frac{\sin y}{y}$ in 0 stetig ergänzbar mit den Wert $f(0) = 1$. Andererseits gilt $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, also aus der Stetigkeit von f schliessen wir, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} f(x^2) = f(\lim_{x\to 0} x^2) = f(0) = 1.$$

Man sagt, dass "ein Variablenwechsel $y = x^2$" ausführt wird.

Logarithmus. Von jetzt an verwenden wir elementare Eigenschaften des reellen Logarithmus $x \mapsto \log x$. Insbesondere hat man folgende wichtige Grenzwerte für jedes $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Der dritte Grenzwert wird auch in der Zukunft bewiesen.

7.1. (schriftlich) Grenzwerte und Variablenwechsel Berechnen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte. Benutzen Sie die wichtige Grenzwerte (sehen Sie die Formelsammlung) und geeignete Variablenwechsel.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x}$, **(b)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\cos x)}{\log x}$,

(c) $\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x)$, **(d)** $\lim_{x\to 1^+} \log x \log(\log x)$,

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$, **(f)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$, $a \neq 0$,

(g) $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x \sin(\mathrm{e}^{-x} \cos x)$, **(h)** $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x^{1/4}}$.

7.2. MC Fragen: Stetigkeit Wählen Sie die richtige Antworten.

(a) "Sei $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ eine stetige, monotone Funktion. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(0)$ und $f(3)$ an." Diese Aussage ist

☐ wahr;

☐ falsch.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Funktion mit $f(a) = (x_0, y_0)$, $f(b) = (x_1, y_1)$, wobei $x_0, y_0 \leq 0 \leq x_1, y_1$ gelte. Dann besitzt f eine Nullstelle in $[a,b]$, d.h. es gibt ein $t \in [a,b]$ mit $f(t) = (0,0)$.

☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) < f(b)$. Dann liegen alle Funktionswerte zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f in $[a,b]$ genau eine Nullstelle.

☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f in (a,b) genau eine Nullstelle.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nur an den Punkten 0 und 1 verschwindet. Dann:

☐ ist f monoton in $]-\infty, 0]$;

☐ ist es möglich, dass f in $(1, +\infty)$ ihr Vorzeichen ändert;

☐ ist das Vorzeichen von f konstant in $]1, \infty[$.

7.3. Lipschtizstetigkeit Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heisst *Lipschitz-stetig*, mit *Lipschitzkonstante* L, falls gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Beweisen Sie folgende Aussage:

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L \geq 0$. Dann ist f stetig (ergänzbar) an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$.

7.4. Folgen von Funktionen Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert folgender Folgen von Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Bestimmen Sie, ob die Konvergenz gleichmässig ist.

(a) $f_n(x) = (1 + x/n)^2$,

(b) $f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{falls } 0 \leq x < 1/2n, \\ 2 - 2nx & \text{falls } 1/2n \leq x < 1/n, \\ 0 & \text{falls } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases}$

7.5. Eine Funkionenreihe Die Funktion $\langle \cdot \rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert wie folgt: $\langle x \rangle$ ist der Abstand von x zu der nächsten ganzen Zahl, nämlich, mit der Abrundungsfunktion (Aufgabe 1.3):

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x - [x] & \text{falls } x - [x] \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - (x - [x]) & \text{falls } x - [x] > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man definiert die Funktion f durch

$$f(x) = \langle x \rangle + \frac{\langle 10x \rangle}{10} + \frac{\langle 100x \rangle}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

definieren.

(a) Zeigen Sie, dass die gegebene Reihe absolut konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Betrachten Sie jetzt die Folge $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}$. Konvergiert f_n nach f gleichmässig?

(c) Ist f stetig?