8.1. Berechnung von Ableitungen Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen mithilfe der Ableitungsregeln:

(a) $x \mapsto \dfrac{3x^7 + x^5 - 2x^4 + x - 3}{x^4}$,

(b) $x \mapsto \dfrac{x^2(x^2 + 10x + 25)}{(x+5)(x+7)}$,

(c) $x \mapsto \dfrac{x^2 + 2}{\mathrm{e}^{-x}} + \log(1 + \cos^2(x))$,

(d) $x \mapsto \sqrt{\cos(\sin(x^2)) + 1}$,

(e) $x \mapsto 2^{\sin x}$.

8.2. (schriftlich) Grenzwerte Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$,

(c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin x \log x$,

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}{1 - \cos x}$,

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log(3 + \sin x)}{x}$,

(f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^{\sin x} - 1}{x}$,

(g) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$.

8.3. Mittelwertsatz

(a) Finden Sie für jede der folgenden Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alle die Punkte $c \in [a,b]$, die die Bedingung des Mittelwertsatzes erfüllen:

$$f_1 : [2,5] \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 3x^2 - 5x + 1,$$
$$f_2 : [1,3] \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{x+3}{x-4},$$
$$f_3 : [-3,4] \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

Zeigen Sie folgende Ungleichungen mithilfe des Mittelwertsatzes:

(b) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2}$ für $x > 0$,

(c) $1 - \dfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$ für $x > 0$.

8.4. MC Fragen: Differenzierbare Funktionen Wählen Sie die richtige Antworten.

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und seien $x_1, x_2, x_3 \in (a, b)$ paarweise verschiedene Zahlen, so dass $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ gilt. Welche Folgerung ist richtig?

- ☐ f' hat genau zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat maximal zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat mindestens zwei Nullstellen auf $[a, b]$;
- ☐ f' hat mindestens drei Nullstellen auf $[a, b]$.

(b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1-x}{x+3}$. Dann gilt:

- ☐ Die Funktion f ist auf $(-\infty, -3)$ streng monoton fallend.
- ☐ Die Funktion f ist auf $(-3, \infty)$ streng monoton fallend.
- ☐ Die Funktion f nimmt auf $(-\infty, -3)$ nur negative Werte an.
- ☐ Die Funktion f nimmt auf $(-3, \infty)$ nur positive Werte an.
- ☐ Keine Aussage ist korrekt.

8.5. Umkehrsatz und Satz von Rolle

(a) Zeigen Sie, dass $f : x \mapsto x + \mathrm{e}^x$ bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und dass ihre Inverse $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Berechnen Sie die Werte $(f^{-1})'(1)$ und $(f^{-1})''(1)$.

(b) Diskutieren Sie Existenz und Anzahl der Losungen folgender Gleichung:

$$(x-1)\mathrm{e}^x - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

8.6. (schriftlich) Graphen Wir erinnern uns, dass um den Graph einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeichnen, braucht man gewöhnlich folgende Informationen:

- der Definitionsbereich D von f, d.h. die Stelle x wobei $f(x)$ definiert ist;
- das Verhalten von f an der Grenze von D, d.h. falls $x_0 \notin D$, die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) \quad \text{und, falls relevant,} \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x);$$

- das Vorzeichen von f, d.h. die Stelle $x \in D$ wobei $f(x)$ positiv, negative oder Null ist;

- die Stellen $x \in D$ wo f wachsend oder fallend ist;
- die Extremstellen und die Extrema von f, d.h. die Stelle $x \in D$ und die dazugehörigen Werte $f(x)$ und wo f lokale/globale Maximum und Minimum besitzt;
- falls gefragt, die Stelle $x \in D$ wo f konvex oder konkav ist.

Finden Sie den Definitionsbereich und die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen; und zeichnen Sie ihren Graph.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)}$,

(b) $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$,

(c) $f(x) = x\sqrt{1-x}$,

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2(\log|x| - 1) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$