10.1. MC Fragen: Das riemmansche Integral Wählen Sie die Richtige Antworten.

(a) Die Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$, der x-Achse, und den Geraden $x = a$ und $x = b$ lässt sich berechnen mittels

☐ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; ☐ $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$; ☐ $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

(b) Welche der folgenden Implikationsketten für eine Funktion f sind richtig?

☐ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig.

☐ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist integrierbar.

☐ f ist integrierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar.

☐ Keine.

10.2. Riemannschen Summen Betrachten Sie die Funktion $f(x) = -3x^2 + 3x$.

(a) Zeichnen Sie den Graph von f. Finden Sie das Maximum von und die Schnittpunkte von f mit der x-Achse.

(b) Berechnen Sie die Riemannsche Summe $S(f, P, \xi)$, wobei P die Partition

$$P = \left\{0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\right\}$$

von $[0, 1]$ ist und ξ_i die Mittelpunkte dieser Partition sind, nämlich

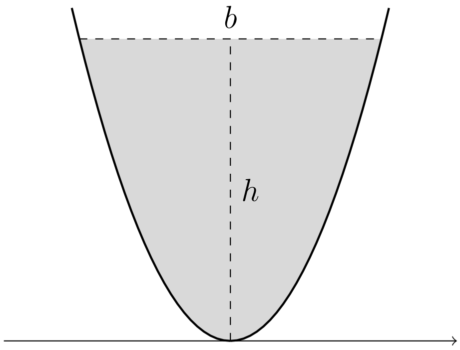
$$\xi_1 = \frac{1}{20}, \qquad \xi_2 = \frac{3}{20}, \qquad \xi_3 = \frac{5}{20}, \qquad \dots \qquad \xi_{10} = \frac{19}{20}.$$

(c) Aus der klassischen Geometrie ist bekannt, dass für eine Parabel $\mathcal{P}$ und eine Gerade t, die lotrechte zu der Symmetrieachse von $\mathcal{P}$ ist, die Fläche zwischen $\mathcal{P}$ und t durch die Formel:

$$A = \frac{2}{3}bh$$

berechnet wird, wobei b die Länge der Sehne ist, die von der Parabel $\mathcal{P}$ aus t ausgeschnitten wird und h die Distanz von t zum Scheitel von $\mathcal{P}$ ist (vgl. die Abbildung).

Berechnen Sie mit dieser Formel die Fläche zwischen f und t, und vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Riemannschen Summe in (a). Welches ist der Fehler?



10.3. Integral mit Riemannschen Summen Berechnen Sie das Integral:

$$\int_0^a e^x \, dx, \quad a > 0,$$

indem Sie *nur die Definition mit Untersumme/Obersumme verwenden* (keinen Fundamentalsatz der Integralrechnung!).

10.4. (schriftlich) Stammfunktionen

(a) Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $[c, d] \subseteq f([a, b])$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto f'(g(x))g'(x), \quad x \in [c, d].$$

Finden Sie eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(b) $(x^3 + 5x + 1)^{2017}(3x^2 + 5)$;

(c) $e^{\cos x} \sin x$;

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + 5x^2}}$;

(e) $-\dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$;

(f) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, mit f beliebig ;

(g) $\tan x$;

10.5. Eine wichtige Schranke Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann Integrabel. Zeigen Sie

(a) f ist beschränkt, i.e. $\exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$;

(b) falls $|f|$ Riemann Integrabel ist, und $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M(b - a).$$