11.1. MC Fragen: Integration

(a) Die Existenz einer Stammfunktion von f ist garantiert,

☐ wenn f stetig ist.

☐ wenn f stückweise stetig ist.

☐ wenn f differenzierbar ist.

☐ immer.

(b) Der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |t| \, dt$ beträgt:

☐ 0.

☐ 1.

☐ 2.

☐ 4.

☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

11.2. Durch Integrale definierte Funktionen

Berechnen Sie die Ableitung folgender durch Integrale definierten reellen Funktionen:

$$A(x) = \int_0^{x^7+\mathrm{e}^x} \cos(\mathrm{e}^{2t} + 2t) \, \mathrm{d}t, \qquad B(x) = \int_{x^2+1}^{x^2+5} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

11.3. Gewichteter Mittelwertsatz

Seien $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit G stetig und $F > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $c \in [a, b]$ existiert, sodass

$$(1) \qquad \int_a^b F(x)G(x) \, \mathrm{d}x = G(c) \int_a^b F(x) \, \mathrm{d}x.$$

(b) Bleibt (1) wahr, wenn F nicht notwendigerweise positiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis oder einem Gegenbeispiel.

11.4. Taylorscher Satz mit Integralrestglied (schriftlich) Sei $f : [x_0, x] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetige differenzierbare Funktion. Wir wollen folgende Version der Taylor-Entwicklung beweisen:

$$(2) \qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

(a) Beweisen Sie die Fälle $n = 0$ und $n = 1$.

(b) Benutzen Sie Induktion, wenn $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist.

Entnehmen Sie aus diesem Ergebnis und mithilfe der gewichteten Mittelwertsatzes 11.3 die Taylor-Entwicklung für f mit Lagrange-Restglied, die in der Vorlesung vorgheführt wurde: es existiert $\xi \in [x_0, x]$, sodass:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}.$$

11.5. Berechnung von Integralen Berechnen Sie folgende bestimmte oder unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{2-x^2+x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_1^9 (\sqrt{x}-1)\,(x+1)\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 t^2\,\cos(2t)\,\mathrm{d}t$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int (x^3+5x+1)^{1291}(3x^2+5)\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{5x}\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+5x^2}}\,\mathrm{d}x$.

11.6. Fläche und Integralrechnung Zeichnen Sie folgende ebenen Kurven und berechnen Sie die Fläche des beschränkten Gebiets, das sie einschliessen:

(a) $x = 0$, $x = 2$ und $y = (x-1)^3$;

(b) $y = \sqrt{x}$ und $y = x^3$;

(c) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$.