### 12.1. MC Fragen: Uneigentliche Integrale

**(a)** Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiere. Welche der Aussagen gilt?

- ☐ Die Folge $(f(n))_n$ ist eine Nullfolge.
- ☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, ist sie eine Nullfolge.
- ☐ Falls die Folge $(f(n))_n$ monoton fällt, konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.
- ☐ Falls $f$ monoton fallend ist, ist $(f(n))_n$ eine Nullfolge.

**(b)** Gegeben sei die Fehlerfunktion (Engl. error function)

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Der Wert von

$$\int_1^2 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x, \quad a > 0$$

ist:

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(1)\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\left(\operatorname{erf}(2\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(\sqrt{a})\right)$
- ☐ $\operatorname{erf}(\sqrt{a}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{a})$.

### 12.2. Berechnung von Integralen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

**(a)** $\displaystyle\int \sin^2 t\, \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;

**(b)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} \quad (\tan(t/2) = u)$;

**(c)** $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \quad (t^2+1 = u)$;

**(d)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}-t}\,\mathrm{d}t \quad (t = \sin^2 u)$;

**(e)** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathrm{e}^t}}$.

**12.3. Partialbruchzerlegung und Integration rationaler Funktionen** Zerlegen Sie in geeignete Partialbrüche und integrieren Sie folgende Funktionen:

**(a)** $\dfrac{t+2}{t^2(t^2+2)}$; **(b)** $\dfrac{t}{t^3+t^2-t-1}$;

**(c)** $\dfrac{t^4+1}{(t^2+1)^2}$; **(d)** $\dfrac{1}{t^6-1}$.

**12.4. (schriftlich) Uneigentliche Integrale** Untersuchen Sie auf Konvergenz und berechnen Sie folgende Integrale (falls konvergent):

**(a)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$; **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1/|x|}}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

**(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|\log|x|}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; **(d)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

**(e)** $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$; **(f)** $\displaystyle\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x$;

**(g)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

**12.5. Gammafunktion** Die Gammafunktion ist für reelle $\alpha > 0$ definiert durch:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

**(a)** Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral (1) für jedes $\alpha > 0$ konvergiert.

**(b)** Beweisen Sie die Funktionalgleichung: $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

**(c)** Beweisen Sie dass für natürliche Zahlen gilt $\Gamma(n+1) = n!$. Was folgern Sie daraus?

**(d)** Berechnen Sie $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ mithilfe des wesentlichen Gausschen Integrals (das in Analysis II bewiesen werden wird):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$