13.1. MC Fragen: Differentialgleichungen

(a) Welche der folgenden Differentialgleichungen sind linear?

- ☐ $(y'-2)^2 = y$
- ☐ $\frac{y'}{1-x^2} + \frac{y}{1+x} = \frac{1}{x^2}$
- ☐ $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$
- ☐ $y'' + y' + y^2 = 0$
- ☐ $y = xy' + (y')^2$

(b) Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$ ist (sind) falsch?

- ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
- ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -3$.
- ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 0$.
- ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung mit $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

13.2. Konvergenz von Reihen

(a) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^s}$ genau dann, wenn $s > 1$, konvergent ist. Bestimmen Sie jetzt die Werte $s \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe:

$$\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k \log k (\log(\log k))^s}$$

konvergent ist. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-n-1}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{(2n+1)^2}$.

13.3. Differentialgleichungen erster Ordnung

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen für $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$:

(a) $y' = (x+y)^2$,

(b) $y' - y = \sin x$,

(c) $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$,

(d) $y\,y' - (1+y)x^2 = 0$.

Bemerkung für (d): y wird sich nicht explizit als Funktion von x schreiben lassen. Es seicht aus, wenn Sie eine Relation zwischen der Funktion y und der Variablen x finden, die keine Ableitungen enthält.

13.4. (schriftlich) Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $y(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Die Lösungen müssen *in reeller Form* geschrieben werden: sie dürfen keine komplexen Exponentialfunktionen enthalten.

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0,$ **(b)** $y'' - 4y' = 0;$

(c) $y'' - y' + y = 0,$ **(d)** $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y^{(2)} - 3y^{(1)} + 2y = 0$

(e) $y^{(4)} + 1 = 0,$ **(f)** $y^{(4)} + y = 0.$

13.5. Nebenbedingungen Ein Federpendel besteht aus einer Schraubenfeder und einem daran befestigten Massestück (mit Masse m), welches sich geradlinig längs der Richtung bewegen kann, in der Feder sich verlängert oder verkürzt. Sei $K > 0$ die Federkonstante und $\omega^2 := K/m$. Dann ist die Bewegungsgleichung des Federpendels gegeben durch

(1) $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$

Bestimme die Lösung der Differentialgleichung (1):

(a) welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2\omega$ erfüllt.

(b) welche die Randbedingungen $x(0) = 1, x(\frac{\pi}{2\omega}) = 1$ erfüllt.