14.1. Inhomogene Lineare Differentialgleichungen Finden Sie die Allgemeine Lösung $y(x)$ der folgenden DGl:

(a) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x$;

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = \mathrm{e}^{2x}$;

(c) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x + \mathrm{e}^{2x}$.

Zusammenfassende Übungen

14.2.

(a) (Prüfung FS 2015) Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = \frac{1+i}{2+3i} \cdot e^{-i\pi/2} + e^{i\pi/2}$$

in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) (Prüfung HS 2016) Schreiben Sie die komplexe Zahl

$$z = (2+i)e^{i\pi/2} + \frac{i-1}{2+i} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

in der Form $z = x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$.

14.3.

(a) (**Prüfung FS 11**) Brechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n} - 1 - 1/n}{1 - n\sin(\frac{1}{n})}$.

(b) (**Prüfung FS 11**) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$.

(c) (**Prüfung HS 13**) Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n},\ n \geq 1,$$

konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $2,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$.

14.4.

(a) (*Basisprüfung Sommer '14*) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}.$$

(b) Für $n \in \mathbb{Z}^{\geq 1}$ sei $a_n := \sqrt{n^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{n^2 + n}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2015}}.$$

14.5.

(a) **(Prüfung FS 2015)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 1 \qquad d_{n+1} := \sqrt{2d_n + 3}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

(b) **(Prüfung HS 2016)** Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ ist rekursiv definiert durch

$$d_1 := 3 \qquad d_{n+1} := \sqrt{3d_n - 2}.$$

Untersuchen Sie die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^{>0}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d_n$ falls dieser existiert.

14.6.

(a) **(Prüfung FS 2015)** Bestimmen Sie die ersten zwei **nicht**verschwindenden Glieder der Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) **(Prüfung HS 2016)** Stellen Sie die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$$

durch eine Potenzreihe in x dar.

14.7. Existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass die Funktionsvorschrift

$$f(x) = \begin{cases} 2x\, r^{-1}, & \text{falls } x \in [0, 2[, \\ \sqrt{2rx - x^2}, & \text{falls } x \in [2, 4] \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ definiert? Zeichnen Sie den Graphen von f.

14.8. Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{a\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x^2 + x - 2ax - a}{|x - a| + |x^2 - a^2|} \end{aligned}$$

an der Stelle $x_0 = a$ stetig ergänzbar?

14.9. Diskutieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x}) + \arctan(e^x)$ im Hinblick auf Extrema, Wendepunkte, Konvexität, und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

14.10. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

(a) Nehmen Sie an, f_n konvergiert gleichmässig gegen eine stetige Funktion f. Zeigen Sie: $f_n(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$.

(b) Folgt die Eigenschaft in a) auch aus der punktweisen Konvergenz?

14.11.

(a) **(Prüfung HS 2010)** Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^x.$$

(b) **(Prüfung FS 2010)** Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) \cdot (1 - \cos(x))}{x \cdot \sin(x)}.$$

(c) **(Prüfung FS 2011)** Bestimmen Sie die Werte von den reellen Parametern a und b so, dass der Limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (a + bx)}{x^2}$$

existiert und bestimmen Sie den Limes in diesem Fall.

14.12.

(a) (Prüfung HS 2010) Untersuchen Sie die Folge

$$s_n := \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2 - 2}{2^j (j+1)^2}$$

auf Konvergenz.

(b) (Prüfung FS 2010) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{n} + n + 1}.$$

(c) (Prüfung FS 2011) Untersuchen Sie die Folge $a_n = \sin(n) \cdot \frac{2n-1}{(n+1)^2}$ auf Konvergenz.

(d) (Prüfung HS 2011) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n\sqrt{n} + 1}.$$

(e) (Prüfung HS 2009) Bestimmen Sie die Menge **aller** $x \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+4} \cdot x^n$$

konvergiert.

14.13. (Prüfung HS 2009)

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2x^{(x^2)}, \quad x > 0$$

sowie

$$(f^{-1})'(2).$$

(b) Skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen

$$\{z \in \mathbb{C} :\ 0 < \mathrm{Im}(e^{i\pi/4} \cdot z) < \sqrt{2}\}.$$

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe des linearen Taylorpolynoms um $t_0 = 8$ eine Näherung an $\sqrt[3]{7}$.
Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler dieser Näherung an.

14.14. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a)

$$\int e^{-2x} \sin(6x)\, dx \ .$$

(b)

$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx \ .$$

(c)

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx \ .$$

14.15.

(a) (Basisprüfung D-INFK Winter '15) Berechnen Sie die Ableitung von

$$g(x) = \int_1^{3x} \frac{\cosh(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

(b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x}\, dx$$

konvergiert. Falls ja, berechnen Sie den Wert dieses Integrals. Es wird in dieser Teilaufgabe erwartet, dass Sie verwendete Stammfunktionen **selbst** berechnen.

14.16.

(a) Bestimmen Sie **alle** Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 6y' = 0$$

welche die Bedingungen

$$y(t) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ und } \ y'(0) = 0$$

erfüllen.

(b) Bestimmen Sie **eine** Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 6y' = e^{2t} + 9t^2.$$

(Hinweise: Teile die rechte Seite in 2 Teile auf, vergleiche mit a).)

(c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y = 2t^2 y' \quad , t \geq 1$$

mit $y(1) = 1$.

14.17.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = t + t \cdot e^{-2t} \; .$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} - y = \cosh t$$

sowie die Lösung, welche die Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = -1$ erfüllt.

14.18. Die durch eine punktförmige Lichtquelle verursachte Beleuchtungsstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstandes zwischen Ausgangspunkt und Beobachtungspunkt ab. Wo befindet sich der dunkelste Punkt x_0 auf der Verbindungsstrecke zwischen zwei zehn Meter voneinander entfernten, punktförmigen Lichtquellen A (bei $x = 0$ Meter) und B (bei $x = 10$ Meter), falls B viermal so stark ist wie A?

14.19. Ein Versuch habe n mögliche Ergebnisse, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_k > 0$, $1 \leq k \leq n$, eintreten, wobei $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Ein natürliches Mass für die Ungewissheit über den Ausgang des Versuchs ist die sogenannte *Entropie*:

$$H := -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k.$$

Zeigen Sie: die Ungewissheit ist am grössten, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.