D-INFK Analysis I FS 2017
Prof. Dr. Özlem Imamoglu

MC-Fragen Serie 1

Einsendeschluss: Freitag, der 26.09.2014 12:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

Falsch. Z.B. ist $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und divergent.

√ (c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

√ (d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

Richtig. Das ist die Kontraposition der vorhergehenden Aussage. Sie folgt direkt aus der Definition der Konvergenz.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \in \mathbb{R}$, und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Da $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$ ist, folgt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |\alpha - a_{2n}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Analog impliziert $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists m_\epsilon : |\alpha - a_{2n+1}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon.$$

Sei $p_\epsilon := 2 \cdot \max(n_\epsilon, m_\epsilon) + 1$. Dann gilt $\forall \epsilon > 0 : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq p_\epsilon$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

√ (b) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Es gilt

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Wir definieren $m_\epsilon = \max(\{k : \sigma(k) \leq n_\epsilon\})$. Es ist $m_\epsilon < \infty$, weil $n_\epsilon < \infty$ und σ eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{\sigma(n)}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

3. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) Die Folge ist monoton wachsend.

Richtig. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(n+1)}{(n+2)n^2} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 2n^2} > 1.$$

Da alle Folgenglieder positiv sind, folgt $a_{n+1} > a_n$.

(b) Die Folge ist beschränkt.

Falsch. Für alle $n \geq 1$ gilt $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ und damit

$$a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)} = \frac{3}{2} n \frac{n}{n+1} \geq \frac{3}{4} n.$$

Also ist (a_n) unbeschränkt.

√ (c) Die Folge ist divergent.

Richtig. Aus der Abschätzung $a_n \geq \frac{3}{4} n$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt und dass folglich (a_n) divergent ist.

√ (d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

Richtig. Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Da der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist, wenn er existiert (egal ob im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne), besitzt (a_n) keinen Limes in $\mathbb{R}$.

4. Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

√ (a) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Richtig. Dies folgt z.B. daraus, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

(b) Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Falsch. Ein Gegenbeispiel ist $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Dann ist nämlich $(a_{n+1} - a_n = 1/(n+1))$ eine Nullfolge, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

√ (c) Jede beschränkte Folge hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

Richtig. Der Satz von Bolzano-Weierstrass sagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Durch Weglassen der ersten Glieder dieser Teilfolge erhält man unendlich viele konvergente Teilfolgen.

5. Die Zahlenfolge $\frac{(-1)^n(n^2+2)}{n^3-2n^2+n}$

(a) hat zwei verschiedene Häufungspunkte

(b) divergiert nach ∞

√ (c) konvergiert mit Grenzwert 0

$$\frac{(-1)^n(n+2)}{n^3-2n^2+n} = \frac{(-1)^n n^2(1+\frac{2}{n^2})}{n^3(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \to 0\,, \qquad \text{für } n\to\infty\,.$$

6. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}:\ a_k \le 0$. Die Reihe konvergiert...

√ (a) ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.

(b) ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.

(c) ..., falls $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \ge n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

Hier ist die Folge der Partialsummen monoton fallend. Ist sie zusätzlich noch nach unten beschränkt, dann ist sie konvergent.

7. Sei $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^k$ eine komplexe Reihe. Diese Reihe besitzt den Grenzwert

√ (a) $1+i$.

(b) $\frac{-1}{2}i$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

Die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konvergiert, falls $|z|<1$ und besitzt in diesem Fall den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Es ist $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, also gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^k = \frac{1}{1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)} = 1+i$.

8. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\cdot z^n$ ist auf dem Rand ihres Konvergenzkreises

√ (a) überall absolut konvergent.

(b) überall konvergent, aber nicht überall absolut konvergent.

(c) überall konvergent ausser in endlich vielen Punkten.

(d) nirgendwo konvergent.

Nach dem Quotientenkriterium ist der Konvergenzradius $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}} \,/\, \frac{2^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right)$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{n})^{3/2}\right) = \frac{1}{2}$. Für $|z|=\frac{1}{2}$ ist $\left|\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\cdot z^n\right| = \frac{1}{n\sqrt{n}}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert absolut. Also ist (a) richtig.

9. Es gilt, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ nicht absolut konvergiert. Kann man daraus ableiten, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergiert?

$\surd$ (a) Ja.

Die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ enthält die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

(b) Nein.

Die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$ enthält die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$

10. Betrachte die Folge

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Welche Aussage stimmt?

√ (a) Die Folge hat einen Häufungspunkt.

Null ist ein Häufungspunkt.

(b) Die Folge hat keinen Häufungspunkt.

Null ist ein Häufungspunkt.

(c) Die Folge konvergiert.

Nein, da die Folge unbeschränkt ist.

√ (d) Die Folge hat eine konvergente Teilfolge.

Ja, die Folge $b_n := a_{2n+1}$ zum Beispiel.

√ (e) Die Folge hat zwei verschiedene konvergente Teilfolgen.

Ja, z.B. $b_n := a_{2n+1}$ und $c_n := a_{4n+1}$.

√ (f) Die Folge ist nach unten beschränkt.

Durch Null z.B.

(g) Die Folge ist beschränkt.

Nein, da sie nach oben unbeschränkt ist.

11. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{1}{n}$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

Dies stimmt zwar, folgt aber nicht aus dem Quotientenkriterium, da der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder gegen Eins strebt.

(b) "Die Reihe divergiert"

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen Eins.

√ (c) Nichts.

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen Eins.

12. Sei $0 \leqslant q < 1$. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1} n^{1000}q^n$ aus?

√ (a) "Die Reihe konvergiert."

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen q.

(b) "Die Reihe divergiert"

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen q.

(c) Nichts.

Der Quotient zweier benachbarter Folgeglieder konvergiert gegen q.

13. Sei $q > 0$. Betrachten Sie die Folge $a_n = q^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dann gilt:

√ (a) falls $0 < q < 1$, konvergiert a_n gegen 0.

Die Folge $n \mapsto q^n$ konvergiert gegen 0 und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also konvergiert das Produkt $e \cdot 0 = 0$.

(b) falls $0 < q < 1$, konvergiert a_n gegen e.

Die Folge $n \mapsto q^n$ konvergiert nach 0 und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also konvergiert das Produkt gegen $e \cdot 0 = 0$.

(c) falls $q > 1$, konvergiert a_n gegen e.

Die Folge $n \mapsto q^n$ ist divergent und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also ist das Produkt divergent.

√ (d) divergiert falls $q > 1$.

Die Folge $n \mapsto q^n$ ist divergent und die Folge $n \mapsto \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert gegen e, also ist das Produkt divergent.

√ (e) falls $q < 1$, ist a_n beschränkt.

Die Folge ist nach 0 konvergent, also bechränkt.

14. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren $b_n = a_{n+N_0}$, wobei $N_0 = 100$. Wählen Sie die richtigen Antworten.

√ (a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, und die Grenzwerte müssen zusammenfallen.

b_n ist eine Teilfolge von a_n, und weil a_n konvergiert, muss b_n nach den gleichen Grenzwert konvergieren.

(b) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, aber es ist nicht nötig, dass die Grenzwerte gleich sind.

b_n ist eine Teilfolge von a_n, und weil a_n konvergiert, muss b_n gegen den gleichen Grenzwert von $(a_n)_n$ konvergieren.

√ (c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

Aus der Definition von Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ sieht man, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$, der Grenzwert nicht von ersten N Gliedern, also $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+N}$ abhängt. In unserem Fall, $N = 100$.

15. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen und sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $b_n = a_{f(n)}$.

√ (a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ aber es muss nicht unbedingt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ sein.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Es gilt

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon : |\alpha - a_n| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

Wir definieren $m_\epsilon = \max(\{k : f(k) \leq n_\epsilon\})$. Es ist $m_\epsilon < \infty$, weil $n_\epsilon < \infty$ und f eine Bijektion ist. Dann gilt $|\alpha - b_n| = |\alpha - a_{f(n)}| \leq \epsilon \quad \forall n \geq m_\epsilon$. Somit folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

16. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei H die Menge ihrer Häufungspunkte.

(a) Es immer gilt $H \neq \emptyset$.

Gegenbeispiel: $a_n = n$ hat keinen Häufungspunkt.

(b) Falls $(a_n)_n$ unbeschränkt ist, gilt $H = \emptyset$.

Gegenbeispiel:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 1/n & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Diese Folge ist unbeschränkt weil die ungeraden Glieder nach $+\infty$ divergieren aber 0 ist Häufungspunkt.

$\surd$ (c) Falls $(a_n)_n$ beschränkt ist, ist $H \neq \emptyset$.

Das ist der Satz von Bolzano-Weierstrass.

(d) Falls $(a_n)_n$ unbeschränkt ist, ist H immer endlich.

Gegenbeispiel: die Folge $(a_n)_n$ definiert durch

$$\begin{array}{llllcrrrr}
1, & & & & \qquad\qquad & & & & a_1, \\
1, & 2, & & & & & & a_2, & a_3, \\
1, & 2, & 3, & & & & a_3, & a_4, & a_5 \\
1, & 2, & 3, & 4, & & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, \\
\ldots & & & & & & & & \ldots
\end{array}$$

ist so, dass jede natürliche Zahl Häufungspunkt ist.

17. Der Wert von $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{4} i\right)^n \frac{1}{n!}$ ist:

(a) $1 + i$.

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

(c) $-1 + i$.

√ (d) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

(e) Keine der Aussagen trifft zu.

Die Reihe ist die Exponentialreihe bei $z = \frac{3\pi}{4} i$ ausgewertet:

$$\operatorname{Exp}\left(\frac{3\pi}{4} i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{4} i\right)^n \frac{1}{n!}$$

Bekanntlich gilt $\operatorname{Exp}(i\alpha) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$, also

$$\operatorname{Exp}\left(\frac{3\pi}{4} i\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

18. Aus dem Cauchy-Kriterium folgt, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq m \geq N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon$$

gilt.

(a) Wahr.

√ (b) Falsch.

Aus dem Cauchy-Kriterium folgt die Abschätzung $|\sum_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ mit m, n, ϵ wie oben. Die Aussage oben ist jedoch falsch, die alternierende harmonische Reihe bildet ein Gegenbeispiel.

19. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

√ (a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

Siehe Bemerkung 3.7.1.

(b) $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Die harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

(c) ($a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Hier ist ein Gegenbeispiel: Sei $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gegen 0 und $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Allerdings divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Die Aussage wird richtig, wenn wir zusätzlich annehmen, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ Die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend.

Die alternierende harmonische Reihe ist ein Gegenbeispiel.

20. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius.

√ (a) Wahr.

(b) Falsch.

Das folgt direkt aus dem Wurzelkriterium:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|})} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$