D-INFK | Analysis I | FS 2017

Prof. Dr. Özlem Imamoglu

MC-Fragen Serie 2

Einsendeschluss: Freitag, der 12.05.2017 12:00 Uhr

---

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 \ln x$. Wie lautet die Ableitung $f'(x)$?

√ (a) $x^2(3\ln x + 1)$

(b) $x^2(3\ln x + xe^x)$

(c) $3x$

(d) $\frac{x^4}{4}e^x$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Mit der Produktregel folgt $(x^3 \ln x)' = (x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2(2\ln x + 1)$.

2. Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \frac{1-x}{x+3}$. Dann gilt:

√ (a) Die Funktion f ist auf $(-\infty, -3)$ streng monoton fallend.

√ (b) Die Funktion f ist auf $(-3, \infty)$ streng monoton fallend.

√ (c) Die Funktion f nimmt auf $(-\infty, -3)$ nur negative Werte an.

(d) Die Funktion f nimmt auf $(-3, \infty)$ nur positive Werte an.

(e) Keine Aussage ist korrekt.

f ist auf $(-\infty, -3)$ monoton fallend falls dort $f'(x) \leq 0$ gilt. Durch Berechnen von $f'(x)$ und Vereinfachen von der Ungleichung $f'(x) \leq 0$ (unter Verwendung umkehrbarer Umformungen und der notwendigen Fallunterscheidungen abhängig vom Nenner) erhält man (a). (b) und (c) folgen auf die gleiche Weise und (d) wird ebenso widerlegt.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls f differenzierbar ist, dann ist auch $x \mapsto f(x^2)$ differenzierbar.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

Die Aussage ist wahr. Denn $f(x^2) = f \circ g(x)$, mit $g(x) = x^2$, und sowohl $g(x)$ als auch $f(x)$ sind differenzierbar, also ist die Verknüpfung auch differenzierbar.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls f differenzierbar ist, so ist $x \mapsto f(|x|)$ auch differenzierbar.

(a) Wahr

√ (b) Falsch

Die Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel die Funktion $f(x) = x$, sie ist Differenzierbar, aber $f(|x|) = |x|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar da $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nicht existiert.

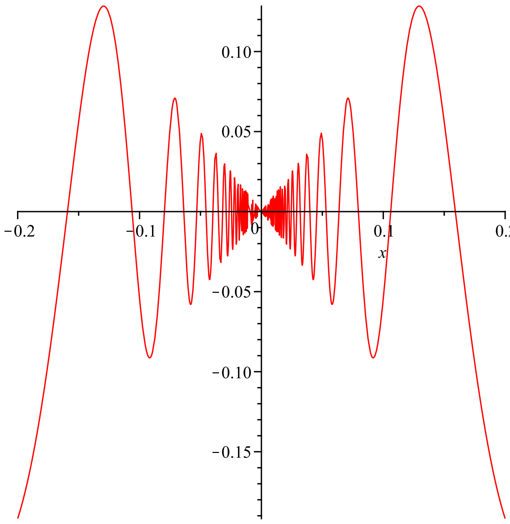
5. Sei $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, dann ist f im Nullpunkt

(a) differenzierbar und stetig.

(b) differenzierbar und nicht stetig.

(c) nicht differenzierbar und nicht stetig.

$\surd$ (d) nicht differenzierbar und stetig.



Graph von $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \end{aligned}$$

und der letzte Grenzwerte existiert nicht da die Funktion oszilliert. Also ist die Funktion im Punkt 0 nicht differenzierbar. Nun überprüfen wir die Stetigkeit der Funktion, dafür sei $\epsilon > 0$ und $|x - 0| < \delta$, wobei wir $\delta = \epsilon$ wählen. Dann ist

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \epsilon,$$

also ist die Funktion stetig im Punkt 0.

6. Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x^{1/2} + n^{-1})^2.$$

Welche der Aussagen gilt?

√ (a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Richtig. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(x^{1/2} + n^{-1})^2 = (\lim_{n\to\infty}(x^{1/2} + n^{-1}))^2 = (x^{1/2})^2 = x$.

(b) Die Funktionenfolge konvergiert gleichmässig.

Falsch. Aus $|f_n(x) - x| = 2x^{1/2}/n + 1/n^2$ folgt, dass für $x > n^2$ auch $|f_n(x) - x| > 2$ ist. Also kann (f_n) nicht gleichmässig konvergiern.

√ (c) Für alle $M > 0$ gilt, dass die Funktionenfolge $f_n|_{[0,M]} : [0, M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

Richtig. Es gilt $|f_n(x) - x| = 2x^{1/2}/n + 1/n^2 \leq 2M^{1/2}/n + 1/n^2$ für alle $x \in [0, M]$. Es folgt, dass $(f_n|_{[0,M]})$ gleichmässig konvergiert.

7. Welche der folgenden Funktionen ist konvex?

√ (a) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\exp'' = \exp > 0$.

√ (b) $-\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$.

(c) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Zum Beispiel,

$$H(0.5(-1) + 0.5(+1)) = 1 > 0.5H(-1) + 0.5H(1) = 0.5.$$

8. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann mindestens eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

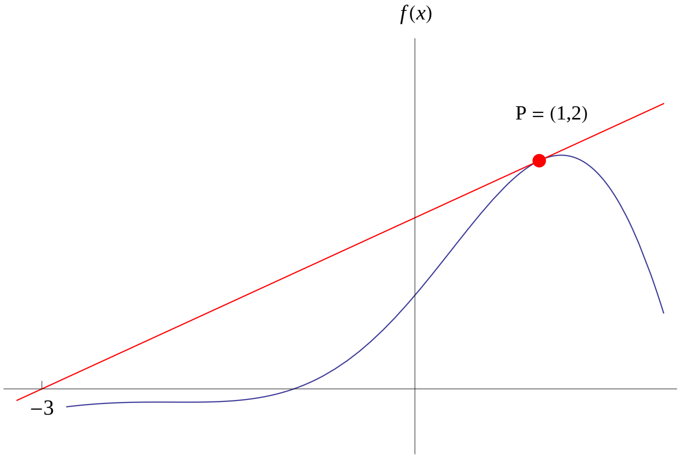
√ (b) Nein.

Gegenbeispiel: Betrachten Sie die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Mit $f = g = H$ gilt es $f \circ g \equiv 1$, aber H ist nicht differenzierbar in 0.

9. Im folgenden Bild ist die rote Gerade im Punkt P tangential an die blaue Kurve, die der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. Welchen Wert hat die Ableitung f' an der Stelle 1?



(a) 2

√ (b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{2}{3}$

(d) -2

(e) Keiner dieser Werte ist korrekt.

Der Wert $f'(1)$ ist die Steigung m der Geraden, welche die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, f(1))$ definiert. Die Steigung ist:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

10. Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f:\ [2,\infty[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\sqrt{x-2},$$

an der Stelle $x=6$?

(a) $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$.

√ (b) $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

(c) $y=\frac{1}{2}x-1$.

(d) $y=x-4$.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Die Tangente ist durch eine Gleichung der Form $y=ax+b$ gegeben, wobei $a=f'(6)$ ist und b dadurch bestimmt ist, dass die Tangente den Punkt $(6,f(6))$ enthält. Es gilt

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

und damit $a=f'(6)=\frac{1}{4}$. Aus $(6,f(6))=(6,2)$ folgt, dass b die Gleichung $2=\frac{6}{4}+b$ erfüllt, dass also $b=\frac{1}{2}$ gilt. Also ist die Gleichung in (b) die richtige.

11. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$ ist ...

(a) $f'(x) = x^x$.

(b) $f'(x) = x^{x-1}$.

(c) $f'(x) = x^2$.

√ (d) $f'(x) = (1 + \log x)x^x$.

(e) $f'(x) = x + x \log x$.

(f) keiner der obigen Ausdrücke.

Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \log x}$. Unter Anwendung der Ketten- und anschliessend der Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = (x \log x)' e^{x \log x} = \left(\frac{x}{x} + \log x\right) e^{x \log x} = (1 + \log x)x^x.$$

12. Welche der folgenden Schlussfolgerungen über eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist FALSCH?

(a) Ist f monoton wachsend, so ist $f' \geq 0$.

(b) Ist $f' = 0$, so ist f konstant.

(c) Ist $f' > 0$ auf $]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend.

√ (d) Ist f streng monoton fallend, so ist $f' < 0$ auf $]a, b[$.

Die Aussagen (a) bis (c) folgen alle aus dem Mittelwertsatz. Aber (d) ist falsch: Ist f streng monoton fallend, so folgt zwar $f' \leq 0$ auf $]a, b[$, aber f' kann in isolierten Punkten verschwinden. Beispiel: $f(x) = -x^3$.

13. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist im allgemeinen *nicht* richtig?

(a) f hat eine Taylorreihe bei $x_0 = 0$.

(b) Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist ≥ 0, aber nicht notwendig > 0.

$\surd$ (c) Dort, wo die Taylorreihe konvergiert, stellt sie die Funktion f dar.

(d) Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

(c) ist falsch. Ein Beispiel ist die Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$. Diese ist beliebig oft stetig differenzierbar, aber ihre Taylorreihe bei $x_0 = 0$ ist identisch gleich 0 und daher für $x \neq 0$ verschieden von $f(x)$. Die übrigen Aussagen sind richtig.

14. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $a < c < b$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

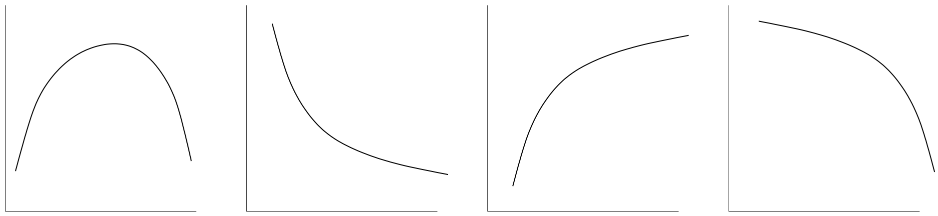
(a) $f'(c) = 0 \iff c$ ist eine Extremalstelle.

(b) $f'(c) = 0 \implies c$ ist eine Extremalstelle.

$\surd$ (c) $f'(c) = 0 \impliedby c$ ist eine Extremalstelle.

Jede Extremalstelle ist ein kritischer Punkt, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel hat $x \mapsto x^3$ einen Terrassenpunkt bei $x = 0$, aber kein (lokales oder globales) Extremum. Die richtige Antwort lautet also (c).

15. Sei f eine Funktion mit $f'' < 0$. Welcher der folgenden Kurven könnten den Graphen G_f von f beschreiben?



I II III IV

√ (a) I

(b) II

√ (c) III

√ (d) IV

(e) Keine.

Die Bedingung $f'' < 0$ impliziert, dass die Steigung f' streng monoton fällt, also G_f eine Rechtskurve beschreibt.

16. Sei

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,6] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x. \end{array}$$

Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

√ (a) 1 und 4 sind lokale Extremalstellen.

(b) 11 ist das globale Maximum von f auf $[0,6]$.

√ (c) -16 ist das globale Minimum von f auf $[0,6]$.

√ (d) 6 ist eine globale Maximalstelle von f auf $[0,6]$.

√ (e) $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$.

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 6 \cdot (x-1)(x-4).$$

Nullsetzen der Ableitung liefert

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1)(x-4) = 0.$$

Daraus ergibt sich $x = 1$ oder $x = 4$. Da

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (0,1)$$

$$f'(x) < 0 \text{ für } x \in (1,4)$$

$$f'(x) > 0 \text{ für } x \in (4,6),$$

ist $x = 1$ eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle (d.h. 1 und 4 sind lokale Extremalstellen). Die Randpunkte $x = 0$ und $x = 6$ des Definitionsbereichs sind auch lokale Extremalstellen. Die Funktionswerte von f in diesen Punkte sind

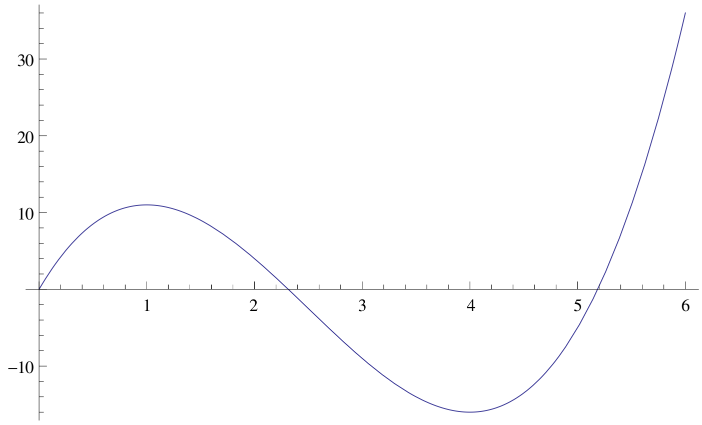
$$f(0) = 0,\ f(1) = 11,\ f(4) = -16,\ f(6) = 36.$$

Daher haben wir:

- $x = 6$ ist die globale Maximalstelle und 36 das globale Maximum;
- $x = 4$ ist die globale Minimalstelle und -16 das globale Minimum (und also $f(x) \geq -16$ für alle $x \in [0,6]$);
- $x = 1$ ist eine lokale Maximalstelle und 11 ein lokales Maximum;

- $x = 0$ ist eine lokale Minimalstelle und 0 ein lokales Minimum.

Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



17. Bestimmen Sie das globale Maximum von $f(x) = \sin(2x) + 2\sin(x)$ auf dem Intervall $[0, \pi]$.

(a) 2.61

(b) 1.73

√ (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x) =$$
$$= 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x) = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Dabei wurden die Relationen

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \;\text{ und }\; \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

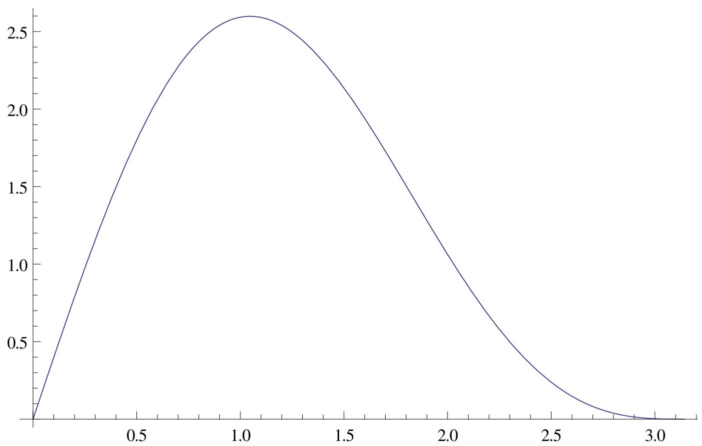
benützt. Nullsetzen der Ableitung $f'(x)$ liefert

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

also $\cos x = \frac{1}{2}$ oder $\cos x = -1$, und daher (in unserem Intervall $[0, \pi]$) $x = \frac{\pi}{3}$ oder $x = \pi$. Der Randpunkt $x = 0$ ist auch eine lokale Extremalstelle. Die Funktionswerte von f sind

$$f(0) = 0,\; f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2},\; f(\pi) = 0,$$

also ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ das globale Maximum. Diese Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f:



18. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \cos(x^2)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

√ (a) Es sei $D = [\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$. Dann ist f auf dem Definitionsbereich D injektiv.

(b) Das Bild von D unter f, also $\{f(x) : x \in D\}$, ist gleich $[0, 1]$.

√ (c) Die Funktion $g : \left[0, \sqrt{1/2}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \sqrt{\arccos x}$ ist die Umkehrfunktion von f im Intervall $[1/\sqrt{2}, 1]$.

Die Funktion f ist auf D streng monoton steigend und folglich injektiv. Weiters ist $\cos(\pi) = -1$, also ist -1 im Bild von D unter f enthalten und dieses Bild kann somit nicht gleich $[0, 1]$ sein. Da $f(g(x)) = \cos(\sqrt{\arccos x}^2) = \cos(\arccos x) = x$ für $x \in [0, \sqrt{1/2}]$ und das Bild von $[0, \sqrt{\pi/4}]$ unter f gleich $[1/\sqrt{2}, 1]$ ist, ist g in der Tat die Umkehrfunktion von f im gefragten Intervall.

19. Sei $0 < \alpha < 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x - \alpha \sin x$. Welche der Aussagen gilt?

√ (a) f ist strikt monoton wachsend.

Richtig. f ist unendlich oft differenzierbar mit positiver Ableitung $1 - \alpha \cos x$.

(b) f ist konvex.

Falsch. Die zweite Ableitung $\alpha \sin x$ von f wechselt das Vorzeichen.

√ (c) Die Umkehrfunktion g von f erfüllt $g'(0) = (1 - \alpha)^{-1}$.

Richtig. Als Konsequenz der Kettenregel gilt $g'(f(0))f'(0) = 1$. Wegen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1 - \alpha$ folgt die Aussage.

20. Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^2 in der Taylorreihe von $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ um $x_0 = 0$.

(a) $\frac{1}{6}$

(b) $\frac{1}{3}$

(c) 1

√ (d) 3

(e) 6

Der Koeffizient ist $\frac{f''(0)}{2}$ und das kann man direkt berechnen. Alternativer Lösungsweg mit geometrischer Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^2} &= \frac{1}{1-(-x)} \cdot \frac{1}{1-(-x)} = (1 - x + x^2 - \cdots) \cdot (1 - x + x^2 - \cdots) \\ &= 1 - 2x + 3x^2 - \cdots \end{aligned}$$