Prof. Dr. Özlem Imamoglu

MC-Fragen Serie 1

Einsendeschluss: Freitag, der 26.09.2014 12:00 Uhr

---

1. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

(b) Jede beschränkte Folge ist konvergent.

(c) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(d) Eine nicht beschränkte Folge divergiert.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \in \mathbb{R}$, und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

(b) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\{1, 2, 3, \dots\}$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\{1, 2, 3, \dots\}$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}, b_n = a_{\sigma(n)}, \forall n \in \mathbb{N}$.

3. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{3n^2}{2(n+1)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Die Folge ist monoton wachsend.

(b) Die Folge ist beschränkt.

(c) Die Folge ist divergent.

(d) Die Folge besitzt keinen Limes in $\mathbb{R}$.

4. Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen 0 konvergiert. Welche der folgenden Aussagen gelten?

(a) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Wenn die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Jede beschränkte Folge hat unendlich viele konvergente Teilfolgen.

5. Die Zahlenfolge $\frac{(-1)^n(n^2+2)}{n^3-2n^2+n}$

(a) hat zwei verschiedene Häufungspunkte

(b) divergiert nach ∞

(c) konvergiert mit Grenzwert 0

6. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}: \; a_k \leq 0$. Die Reihe konvergiert...

(a) ...genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach unten beschränkt ist.

(b) ...genau dann, wenn (a_k) eine monoton wachsende Nullfolge ist.

(c) ..., falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \geq n_0 : |a_k| < \varepsilon$.

7. Sei $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^k$ eine komplexe Reihe. Diese Reihe besitzt den Grenzwert

(a) $1 + i$.

(b) $\frac{-1}{2}i$.

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

8. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \cdot z^n$ ist auf dem Rand ihres Konvergenzkreises

(a) überall absolut konvergent.

(b) überall konvergent, aber nicht überall absolut konvergent.

(c) überall konvergent ausser in endlich vielen Punkten.

(d) nirgendwo konvergent.

9. Es gilt, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ nicht absolut konvergiert. Kann man daraus ableiten, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergiert?

(a) Ja.

(b) Nein.

10. Betrachte die Folge

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Welche Aussage stimmt?

(a) Die Folge hat einen Häufungspunkt.

(b) Die Folge hat keinen Häufungspunkt.

(c) Die Folge konvergiert.

(d) Die Folge hat eine konvergente Teilfolge.

(e) Die Folge hat zwei verschiedene konvergente Teilfolgen.

(f) Die Folge ist nach unten beschränkt.

(g) Die Folge ist beschränkt.

11. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{1}{n}$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

(b) "Die Reihe divergiert"

(c) Nichts.

12. Sei $0 \leqslant q < 1$. Was sagt das Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1} n^{1000} q^n$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

(b) "Die Reihe divergiert"

(c) Nichts.

13. Sei $q > 0$. Betrachten Sie die Folge $a_n = q^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dann gilt:

(a) falls $0 < q < 1$, konvergiert a_n gegen 0.

(b) falls $0 < q < 1$, konvergiert a_n gegen e.

(c) falls $q > 1$, konvergiert a_n gegen e.

(d) divergiert falls $q > 1$.

(e) falls $q < 1$, ist a_n beschränkt.

14. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren $b_n = a_{n+N_0}$, wobei $N_0 = 100$. Wählen Sie die richtigen Antworten.

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, und die Grenzwerte müssen zusammenfallen.

(b) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$, aber es ist nicht nötig, dass die Grenzwerte gleich sind.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

15. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation der natürlichen Zahlen und sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren die Folge $b_n = a_{f(n)}$.

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(b) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert, existiert $\lim_{n\to\infty} b_n$ aber es muss nicht unbedingt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ sein.

16. Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei H die Menge ihrer Häufungspunkte.

(a) Es immer gilt $H \neq \emptyset$.

(b) Falls $(a_n)_n$ unbeschränkt ist, gilt $H = \emptyset$.

(c) Falls $(a_n)_n$ beschränkt ist, ist $H \neq \emptyset$.

(d) Falls $(a_n)_n$ unbeschränkt ist, ist H immer endlich.

17. Der Wert von $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3\pi}{4} i\right)^n \frac{1}{n!}$ ist:

(a) $1 + i$.

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

(c) $-1 + i$.

(d) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$.

(e) Keine der Aussagen trifft zu.

18. Aus dem Cauchy-Kriterium folgt, dass für jede konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq m \geq N$ die Abschätzung

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon$$

gilt.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

19. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge.

(b) $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(c) ($a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Rightarrow$ Die Folge $(a_n)_n$ ist monoton fallend.

20. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Dann haben die beiden Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius.

(a) Wahr.

(b) Falsch.