Kapitel 2.

§2.2 Die reellen Zahlen.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Man kann die Gleichung $x+1=0$ in $\mathbb{N}$ nicht lösen.

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Die Gleichung $2x+3=0$ ist in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar.

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$

$x^2 + 2 = 0$ ist in $\mathbb{Q}$ nicht lösbar.

$\mathbb{Q}$ weist "Lücken" auf.

Wir können $\mathbb{Q}$ erweitern zum Körper $\mathbb{R}$, der reellen Zahlen.

Die reellen Zahlen bilden einen

Kommutativen "Körper mit Einselement"

Es gibt zwei Operationen

Addition $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x + y$

Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x, y \to x \cdot y$

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

Regeln der Addition (Abelsche Gruppe)

A.i) Assoziativität : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \; x+(y+z)=(x+y)+z$

A.ii) Neutrales Element: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \; x+0=x$

A.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: \; x+y=0 \qquad y=-x$

A.iv) Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x+y=y+x$

Regeln der Multiplikation

M.i) Assoziativität : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \; x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

M.ii) Neutrales Element: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \; x\cdot 1=x$

M.iii) Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \; \exists y \in \mathbb{R}: \; x\cdot y=1$

M.iv) Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x\cdot y=y\cdot x$

Distributivitäts-Gesetz

D) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \; x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

$\mathbb{R}$ ist ein Körper.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (bezüglich der Multiplikation) ist eine abelsche Gruppe.

Weitere Axiome für $\mathbb{R}$.

Es gibt auf $\mathbb{R}$ eine Ordnung $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften

Ordnungseigenschaften

O.i) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$

O.ii) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O.iii) Identität: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O.iv) Die Ordnung ist total: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y$ oder $y \leq x$.

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation

K.i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K.ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper

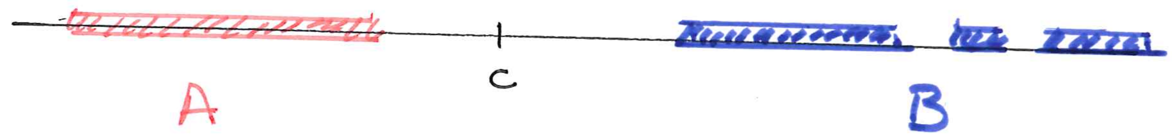
$\mathbb{Q}$ bildet auch einen angeordneten Körper.

ABER Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, erfüllen das VOLLSTÄNDIGKEITSAXIOM NICHT!

$\mathbb{R}$ ist <u>ordnungsvollständig</u>:

(V) Zu je zwei nicht leeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass gilt

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B.$$



Folgerungen 2.2.1.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad (-1)\cdot x = -x$

(ii) $(-1)\cdot(-1) = 1$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x^2 \geq 0$

(iv) $\forall x > 0: \quad x^{-1} > 0$

(v) $\forall\, x, y \geq 0: \quad x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$

(vi) $x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$

(vii) $x \leq y \wedge z \leq 0 \Rightarrow y \cdot z \leq x \cdot z$

(viii) $x \leq y \wedge u \leq v \Rightarrow x+u \leq y+v$

(ix) $0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq u \leq v \Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$.

Beweis: (i) $\forall x \in \mathbb{R}: (-1)\cdot x = -x$.

$6\frac{1}{2}$

$$x + (-1)\cdot x \underset{M(\text{II})}{=} 1\cdot x + (-1)\cdot x \underset{\text{Dist.}}{=} (1+(-1))\cdot x = 0\cdot x = 0.$$

$\Rightarrow$ $(-1)\cdot x$ ist die Add. inverse von x.

$$\underline{(-1)\cdot x = -x} \;!$$

Bsp.: Wichtige Folgerung: Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $c^2 = 2$.

Beweis: Sei $A := \{a \in [1,2] : a^2 < 2\}$
$B := \{b \in [1,2] : b^2 \geq 2\}$.

Dann gilt $1 \in A$, $2 \in B$, $A \neq \emptyset \neq B$.

Aus Folg. 2.2.1 (v): $\forall x, y \geq 0 : x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2$
gilt $a < b$ $\forall a \in A$, $b \in B$ (da $b^2 \geq 2 > a^2$).

Das Vollständigkeitsaxiom $\Longrightarrow$ $\exists c \in \mathbb{R}$ mit

$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad b \in B.$

Insbesondere folgt $1 \leq c \leq 2$

Wir zeigen dass $c^2 = 2$. (z.z).

Andernfalls gilt nach O(iv) entweder

a) $c^2 < 2$ oder

b) $c^2 > 2$

Im Falle a), da $c^2 < 2$ ist, gibt es ε, $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{5}$

mit $c^2 = 2 - 5\varepsilon$

Sei $a := c + \varepsilon > c$. Dann für diese a

$$a^2 = c^2 + 2c\varepsilon + \varepsilon^2 < c^2 + 2 \cdot 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon = c^2 + 5\varepsilon = 2.$$

$\Rightarrow a \in A$ aber $a > c$

Diese ist im Wiederspruch zur Trennungseigenschaft von c ↯.

$\Rightarrow c^2 \not< 2$ $\times$

(Ähnlich) Fälle b) $\dashrightarrow$ Wiederspruch

<u>Bmk</u>: Der Körper $\mathbb{Q}$ ist <u>nicht</u> ordnungsvollstendig

Sei $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq x^2 \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x \leq 2,\ x^2 \geq 2\}$

Dann gilt $a \leq b \quad \forall a \in A,\ b \in B$

Aber ein c mit $a \leq c \leq b$ würde dann $c^2 = 2$ erfüllen!

Für $x, y \in \mathbb{R}$

Defn: $$\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } x \leq y. \end{cases}$$

Insbesondere ist der **Absolutebetrag** einer Zahl $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| := \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 2.2.1 (i) $|x| \geq 0 \quad \forall x$

(ii) $x \leq |x| \quad \forall x \in X$.

(iii) $|xy| = |x||y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

wichtig! (iv)* $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

Dreiecksungleichung.

(v) $|x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$

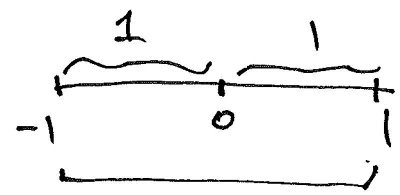
Satz 2.2.2. (Young ungleichung).

Für $x,y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gilt

$$2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$$

$$\underset{\displaystyle |x| < 1}{\overset{\displaystyle |x-0|}{\shortparallel}}$$

$$\iff \quad -1 < x < 1$$



§2.3 Supremum und Infimum.

Defn: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

(a) Dann heisst $c \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A falls $\forall a \in A : a \leq c$

(b) $c \in \mathbb{R}$ heisst untere Schranke von A falls $\forall a \in A : a \geq c$

(c) A heisst nach oben beschränkt falls es eine obere Schranke von A gibt.

(d) A heisst nach unten beschränkt falls es eine untere Schranke von A gibt

(e) A heisst beschränkt falls es nach oben und unten beschränkt ist.

(f) Ein Element $\underline{\underline{M \in A}}$ ist ein <u>Maximum</u> element von A falls $a \leq M \quad \forall a \in A$

(g) Ein Element $\underline{\underline{m \in A}}$ ist ein <u>Minimum</u> element von A falls $m \leq a \quad \forall a \in A$.

Falls ein maximum (resp minimum) existiert, wird es mit $\max A$, $(\min A)$ bezeichnet.

Zentraler Bedeutung

Folgerung der Ordnungsvollständigkeitsaxiom.

<u>Satz 2.3.1</u>: i) Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke, c.

$c = \operatorname{Sup} A$, das Supremum von A.

ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine grösste untere Schranke

$\tilde{c} = \operatorname{Inf} A$, das Infimum von A

Bsp. 1) $A = [1, 2) \subset \mathbb{R}$

Dann gilt -2 ist auch eine untere Schranke

-1

-1.1 " " " " " "

1 ist auch eine untere Schranke,

1 ist die grösste untere Schranke, $\inf A = 1$.

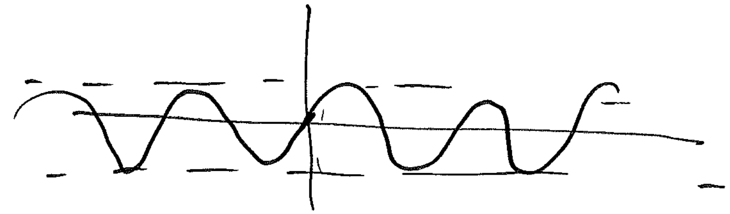
1 ist auch ~~eine~~ $\min(A)$.

$\sup A = \underline{\underline{2}}$ = kleinste obere Schranke

3 ist auch eine obere Schranke.

2 ist kein max, A hat kein max.

2) $A := \{ \sin x \mid x \in \mathbb{R} \}$.



$\operatorname{Inf} A = -1 \quad = \quad \min A$

$\operatorname{Sup} A = 1 \quad = \quad \max A$

3) $A := \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.

Wir werden sehen dass A nach unten und oben beschränkt ist

$\operatorname{Inf} A = \min A = 2 \qquad \operatorname{Sup} A = e = 2.718 \ldots$

Defn. (Vereinbarung) Für nach oben unbeschränkte Mengen $A \neq \emptyset$, setzen wir

$$\sup A := \infty.$$

Für nach unten unbeschränkte Mengen $A \neq \emptyset$ setzen wir

$$\inf A := -\infty.$$

Bemerkung. Eine äquivalente characterisierung des Supremums $s = \sup A$ ist die Bedingdung

$$\underbrace{(\forall a \in A : a \leq s)}_{\text{s ist eine obere Schranke.}} \wedge \underbrace{(\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : a > s - \varepsilon)}_{\text{s ist die kleinste ob. Sch.}}.$$

d

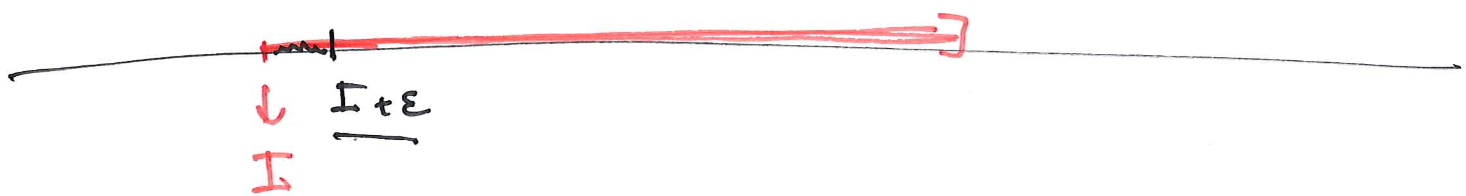
s ist eine obere Schranke.

s ist die <u>kleinste</u> ob. Sch.

d.h für jede $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ ist kein obere Schranke.

Analog für Infimum $I := \inf A$.

$$\underbrace{\left(\forall a \in A : a \geq I\right)}_{\text{I ist eine Untere Schranke}} \wedge \underbrace{\left(\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < I + \varepsilon\right)}_{\text{I ist die grösste Untere Schranke.}}$$



Eigenschaften

1) Falls $E \subseteq F$ und F nach oben beschränkt ist, gilt

$$\sup E \leq \sup F$$

z.B. $E = (2,3)$ $F = (1,4)$

$$3 = \sup E < \sup F = 4.$$

2) Falls $E \subset F$ und F nach unten beschränkt ist, gilt

$$\underbrace{\inf F}_{=1} < \underbrace{\inf E}_{=2} \quad (\inf F \leq \inf E).$$

3) Falls $\forall x \in E$, $\forall y \in F$ gilt $x \leq y$, dann folgt

$$\operatorname{Sup} E \leq \operatorname{Inf} F$$

zB $E = (1,2)$ $F = (2,4)$

$$2 = \operatorname{Sup} E \leq \operatorname{Inf} F = 2.$$

4) Für je zwei Teilmengen $X, Y \subset \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Setze.

$$cX := \{cx \mid x \in X\}$$

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Dann gilt

$$\sup\{X \cup Y\} = \max\{\sup X, \sup Y\}$$
$$\sup\{X + Y\} = \sup X + \sup Y$$
$$\sup\{cX\} = c \sup X \quad \text{for } c > 0$$
$$\sup\{cX\} = c \inf X \quad \text{for } c < 0.$$

Satz 2.3.2. (Archimedisches Prinzip).

Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben

Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$(n-1)x \leq y < nx$$