

Satz 2.3.1 i) Jede nicht leere,

nach oben beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$
besitzt eine kleinste obere Schranke,

das Supremum von $A = \sup(A)$

(ii) Jede nicht leere, nach unten beschränkte

Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt eine größte

untere Schranke, das Infimum von $A = \inf(A)$

$$S = \sup A \iff (\forall a \in A : a \leq S) \wedge (\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > S - \varepsilon)$$

$$I = \inf A \iff (\forall a \in A : a \geq I) \wedge (\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : a < I + \varepsilon)$$

Satz 2.3.2 (Archimedisches Prinzip)

Seien $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ gegeben.

Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$(n-1)x \leq y < nx$$

insbesondere gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$n-1 \leq y < n$$

Idee: Beweis (Satz 2.3.1).

(i) Sei A nach oben beschränkt

$B := \{b \in \mathbb{R} \mid b \text{ ist obere Schranke für } A\}$.

$$B \neq \emptyset$$

und $a \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$.

Nach Vollständigkeitsaxiom gibt es $c \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad c \geq a \quad \forall a \in A \Rightarrow c \in B$$

$$(ii) \quad c \leq b \quad \forall b \in B \Rightarrow c = \min B.$$

d.h. c ist die kleinste obere Schranke für A . $\square$

§ 2.4 Der Euklidische Raum. $\mathbb{R}^n$

Satz 2.4.1 (Cauchy-Schwarz) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\text{gilt } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

$$\text{wobei } x = (x_1, \dots, x_n) \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

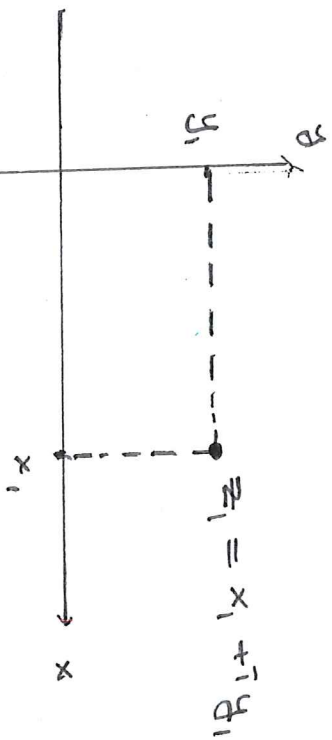
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Satz 2.4.2 Die Euklidische Norm hat die

Eigenschaften

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \geq 0 \quad (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Komplexe Zahlen



$$i^2 = -1$$

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Defn.: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heisst

a) $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$ Real und Imaginärteil von z

b) $\bar{z} := x - iy$ die zu z konjugierte komplexe Zahl

c) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag, Länge, (Norm) von z

Eigenschaften: a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

b) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

c) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

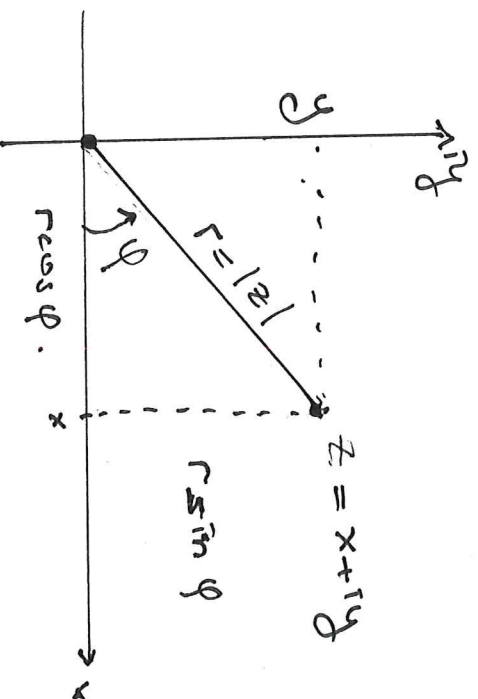
d) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, $z \bar{z} = x^2 + y^2$

e) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

f) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Polar Darstellung

Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existiert ein eindeutig bestimmter Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
 $r = |z|$. φ heisst das Argument von z
 $\varphi = \arg(z)$



Multiplikation in Polardarstellung

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$$

Merke: Bei der Multiplikation komplexer

Zahlen werden die Beträge multipliziert

und die Argumente addiert

Definition: $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$

Formel von Euler

Eigenschaften: $e^{i0} = 1$
 $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$
 $e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

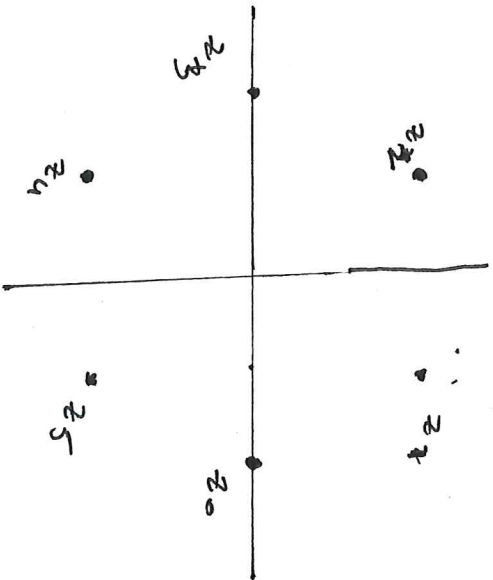
Satz: Es gibt genau n verschiedene
komplexe Zahlen $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, die die
Gleichung $z^n = 1$ erfüllen, diese sind
gegeben durch $\frac{0+2\pi k}{n}$
 $z_k = 1 e^{i(2\pi k/n)}, \quad k=0, 1, \dots, n-1.$

Bsp:

$$z_6 = 1$$

$$z_0 = e^{i0} = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{6}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = e^{i\frac{6\pi}{6}} = e^{i\pi} = -1 \dots$$

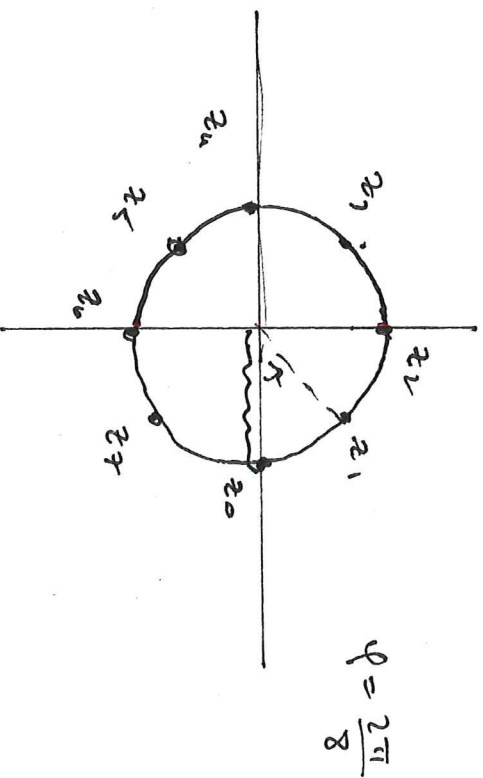


Lösung von $z^n = a$

Man stellt a in Polarkoordinaten dar,

$a = re^{i\varphi}$ und zieht die n -te Wurzel

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$



Die achten Einheitswurzeln.

§ Kapitel 3

Folgen und Reihen

①, ②, ③ . . .

Die Folgen

1, 2, 4, 8, . . .

1, -1, 1, -1, 1, -1, . . .

sind Zahlenfolgen.

(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), . . .

Folge in $\mathbb{R}^3$

$f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$,

$f_2(x) = x^2$, . . .

Folge von
Funktionen.

Defn Eine Folge reeller (komplexer) Zahlen

ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$

wobei wir das BZG von $n \geq 1$ mit

a_n statt $a(n)$ bezeichnen.

Eine Folge wird dann meistens mit $(a_n)_{n \geq 1}$

bezeichnet.

$$(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$$

Allgemein: Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum
über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Eine Folge $a: \mathbb{N} \rightarrow V$ ist eine Abbildung
 $n \mapsto a_n$.

Bsp. . 1) $a_n := \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$ $n \geq 1$

2) $a_1 = 0.9$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.999$, . . .

3) Rekursive: a_1 gegeben

$$a_{n+1} := \phi(a_1, \dots, a_n).$$

z.B. $a_1 = 1$ $a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ $n \geq 1$

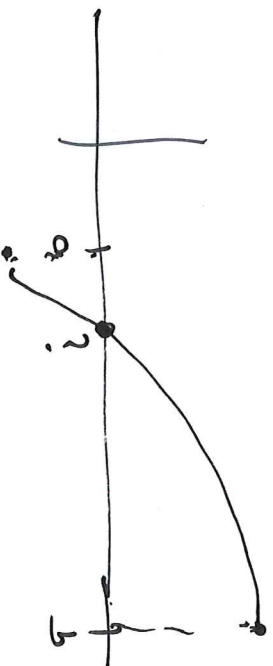
z.B. $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$.

Fibonacci Folge.

Bsp. Regel von Sturm

Gesucht: Nullstelle von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Voraussetzung: $f(a) \cdot f(b) < 0$



Iteration: Definiere zwei Folgen (u_n) und (v_n) rekursiv mit den Startwerten $u_0 = a$ $v_0 = b$ und der folgenden Iterationsvorschrift.

FOR $n = 1, 2, \dots$

$$x := (u_{n-1} + v_{n-1}) / 2$$

IF $f(x) = 0$ THEN RETURN

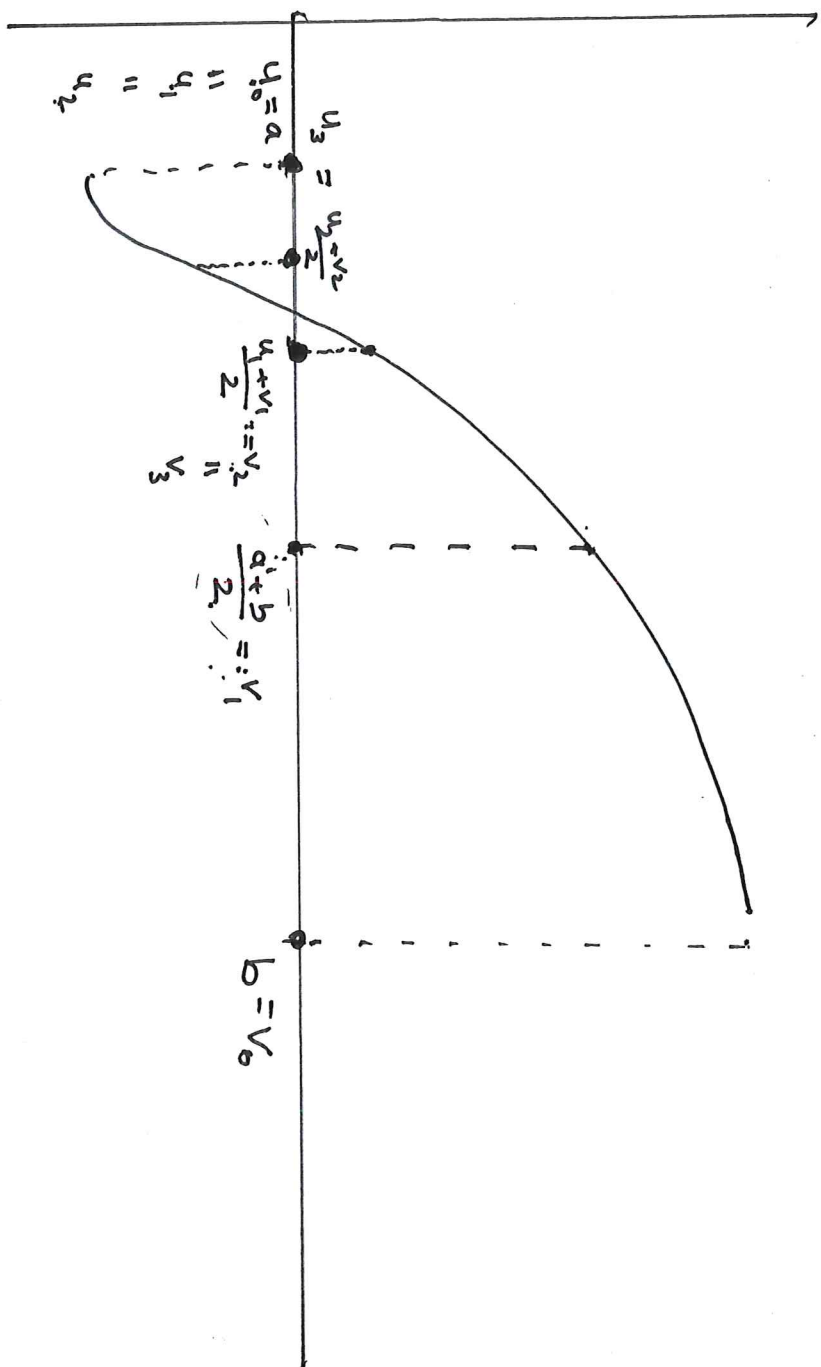
IF $f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0$ THEN

$$u_n := x \quad v_n := v_{n-1}$$

ELSE

$$u_n := u_{n-1} \quad v_n := x$$

Output = x mit $f(x) = 0$.



Definition

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

① Eine Folge (a_n) heißt beschränkt falls die Menge $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist

$\Leftrightarrow \exists C > 0$ so dass $|a_n| \leq C \quad \forall n \geq 1$.

② Für $1 \leq n_1 \leq n_2$ heißt $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n)

z.B.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$1, \left(\frac{1}{2}\right), \frac{1}{3}, \left(\frac{1}{4}\right), \dots, 0, \dots$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2n} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$$

ist eine Teilfolge

$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots$ ist auch eine Teilfolge.

§ 3.2 Grenzwert einer Folge.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

In der Anschauung sieht a_n gegen 0.

$$a_n = (-1)^n \quad 1, -1, 1, -1, \dots$$

springt hin und her.

Defn. ① (Grenzwert einer Folge).

Eine Folge (a_n) konvergiert mit

Grenzwert (Limes) a (konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$)

falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt

so dass $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$.

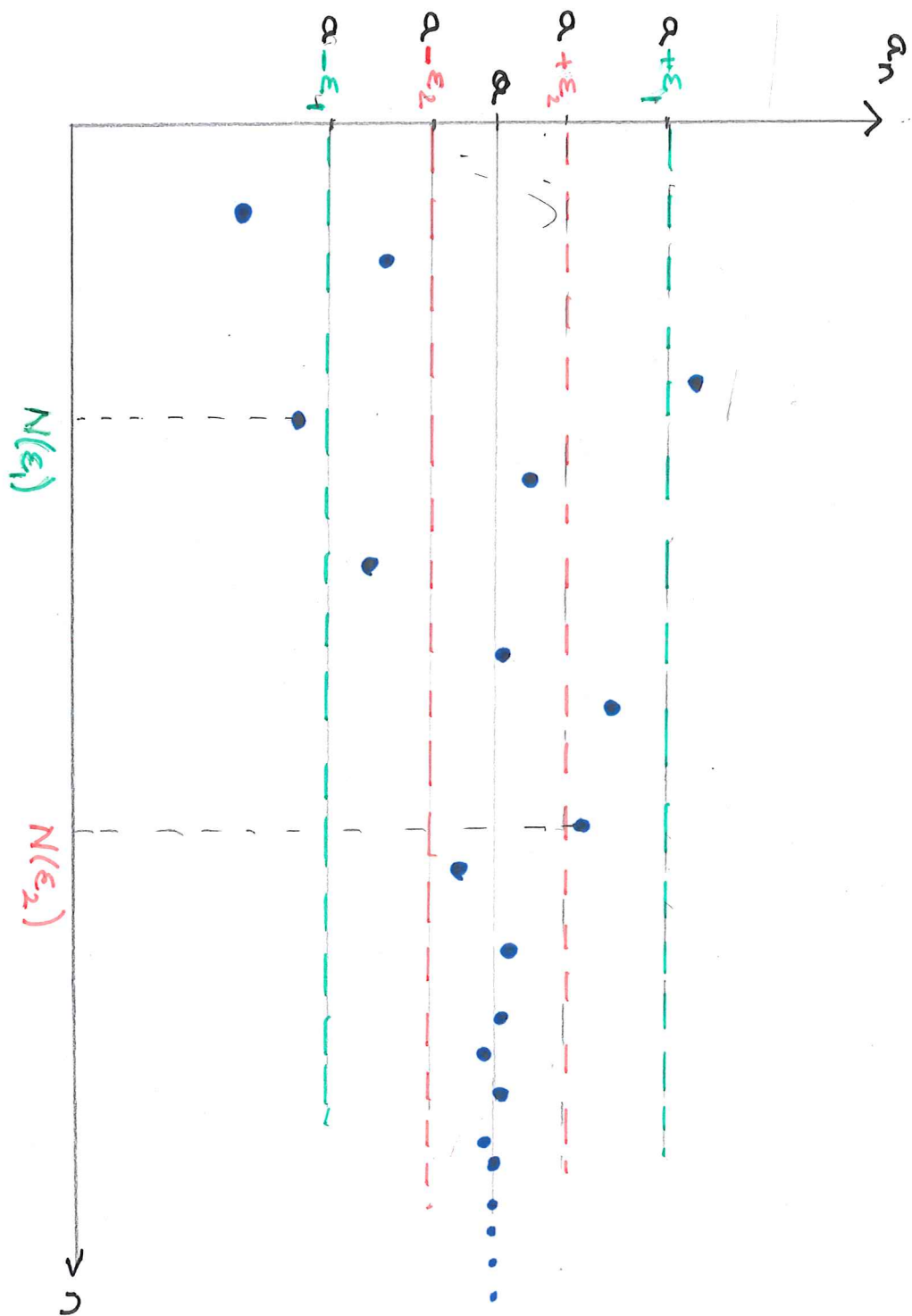
② Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$

falls für jedes $\varepsilon > 0$, die Menge der Indizes
 $n \geq 1$ für welche $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ endlich ist.

Anders gesagt: Eine Folge (a_n) hat einen Grenzwert a , wenn sich ausserhalb einer beliebig grossen Umgebung von a (ε -Neighborhood) nur endlich viele Glieder der Folge befinden.

In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$



Defn Eine Folge heisst konvergent
falls sie einen Limes besitzt
andernfalls heisst sie divergent.

Bsp. ① Sei $a_n = \frac{1}{n}$

Dann gilt $\lim a_n = 0$.
 $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

z.z.: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ s.d. $|a_n - 0| < \varepsilon, \forall n > N_\varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\frac{1}{\varepsilon} > 0$

Nach Arch. Prinzip: $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon$$

Dann gilt für alle

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{N_\varepsilon}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n$$

Woraus folgt dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\text{d.h. } \forall n > N_\varepsilon \quad |a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon. \quad \square$$

$$\Rightarrow \lim a_n = 0.$$

Bmk. Nicht alle Folgen sind konvergent.

BSP. 3.2.2. . (1) $a_n = (-1)^n$. $-1, 1, -1, 1, \dots$

Behauptung: (a_n) divergiert.
d.h. Es gibt kein $\bar{a}$ so dass $\lim a_n = \bar{a}$.

Für jedes $a \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ gilt
 $|a_n - a| + |a_{n+1} - a| \geq |(a_n - a) - (a_{n+1} - a)|$
" "
 $|a_n - a_{n+1}| = 2$.

d.h. kein $a \in \mathbb{R}$ kann Grenzwert von (a_n) sein

Falls existiert: Für gegebene $\varepsilon = \frac{1}{2}$ es muss N_ε existieren so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n > N_\varepsilon$.

Aber dann $|a_n - a| + |a_{n+1} - a| < 1$ $\int$.

② $a_n = n$. Zu jedem $a \in \mathbb{R}$, gibt es ein $N_a \in \mathbb{N}$ mit $a < N_a$ (Arch. Prinzip).

Also $\forall n > N_a > a$

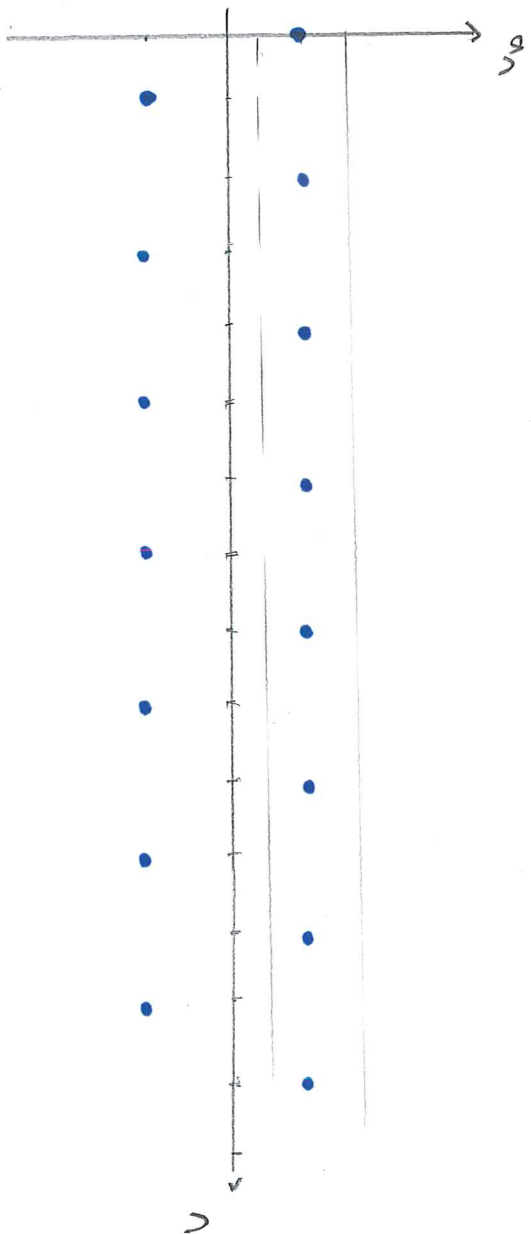
$$|a_n - a| = |n - a| > 0.$$

Und kein $a \in \mathbb{R}$ kann Grenzwert von (a_n) .

Divergente Folgen

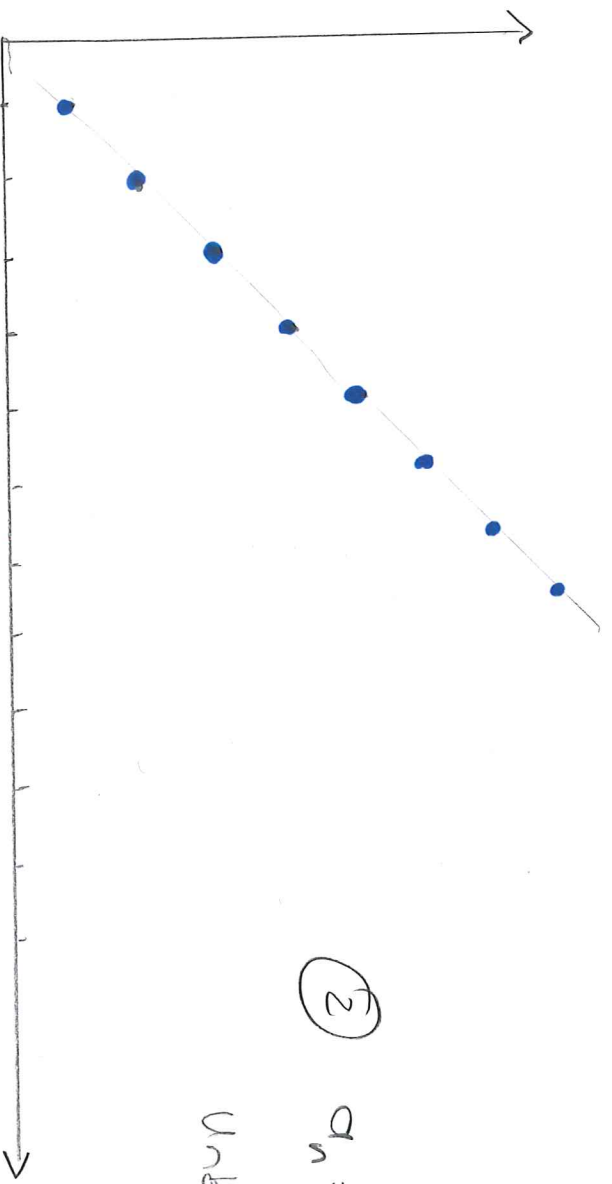
① $a_n = (-1)^n$ Beschränkt

41



② $a_n = n$

Unbeschränkt



22

$a_n = n$ "strebt" gegen ∞ .

Defn : (uneigentliche Konvergenz) -

Für Folge (a_n) heisst uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, falls es zu jedem $C > 0$ ein $N_C \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{mit } n > N_C.$$

Sie heisst uneigentlich konvergent gegen $-\infty$ falls die Folge $(-a_n)$ uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert

Bsp. 3.2.1. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$
und $a_n = q^n$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Geometrische Folge: Eine Folge heißt geometrisch wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder stets konstant ist.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Beweis: ~~für~~

$$\lim q^n = 0 \quad 0 < q < 1$$

Idee: Zu zeigen dass $\frac{1}{q^n}$ sehr gross wird
und deswegen q^n sehr klein wird ($n \rightarrow \infty$)

$$0 < q < 1 \Rightarrow \frac{1}{q} > 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 + \delta \quad \text{mit } \delta > 0.$$

$$\frac{1}{q^n} = (1 + \delta)^n \stackrel{\substack{\text{Binomische} \\ \text{Lehrsatz}}}{=} 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 + \dots + \delta^n > 1 + n\delta > n\delta$$

$\forall n \in \mathbb{N}.$

$$\text{Also } 0 < q^n < \frac{1}{n\delta} \quad \forall n \geq 1.$$

Setzt für $\varepsilon > 0$, wähle $N_0 = N(\varepsilon)$ mit

$$\frac{1}{\varepsilon \delta} < N_0 \quad (\text{Arch. Prinzip})$$

Dann gilt $\frac{1}{N_0 \delta} < \varepsilon$

Dann $\forall n > N_0 \quad 0 < q^n < \frac{1}{n \delta} < \frac{1}{N_0 \delta} < \varepsilon.$

d.h. $\forall n > N_0 \quad |q^n - 0| < \varepsilon.$

d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$

(iii) Sei $a_n = \sqrt[n]{n}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

Übung: Bitte legen Sie ~~den~~ Beweis im Skript.