Defn 1 Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

2 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst **beschränkt** falls die Menge $\{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

3 Eine Folge (a_n) **konvergiert mit Grenzwert (Limes) a** falls für jedes $\varepsilon > 0$, eine Index $N(\varepsilon) \geq 1$ gibt so dass $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$.

$$\lim a_n = a$$

3' Eine Folge (a_n) **konvergiert gegen a** falls für jedes $\varepsilon > 0$, die Menge der Indizen $n \geq 1$ für welcher $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ endlich ist

$$3 \equiv 3'$$

Defn: Eine Folge heisst <u>konvergent</u> falls sie einen Limes besitzt, andernfalls heisst sie <u>divergent</u>

Bsp 1. $\lim \frac{1}{n} = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$

2. Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$, und $a_n = q^n$
Dann gilt $\lim a_n = \lim q^n = 0$

3. Sei $a_n = \sqrt[n]{n}$. Dann gilt $\lim a_n = 1$

4. Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist a_n divergent

5. Sei $a_n = n$. Dann ist a_n divergent

Defn Eine Folge (a_n) heisst uneigentlich konvergent gegen $+\infty$, falls es zu jedem $c>0$ ein Index $N_c \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_n \geq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N_c.$$

Bsp. $a_n = n$ uneigentlich konvergiert gegen $+\infty$.

Bsp 3.2.2. Seien $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$

Dann gilt $\boxed{\lim_{n \to \infty} n^p q^n = 0}$

Exponentialfunction a^x $(a > 1)$ wächst schneller als jede potenz x^p

Wenn x genügend gross ist, $a^x > x^p$

$\left(a = \frac{1}{q} > 1\right)$ $\qquad n^p q^n = \frac{n^p}{a^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

z.z. $\lim n^p q^n = 0$ (Folge = sequence).

z.z. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$ s.d.

$\forall n > N_\varepsilon$, $|n^p q^n - 0| < \varepsilon$.

Wir werden und $\left\{ \begin{array}{ll} \lim r^n = 0, & 0 < r < 1 \\ \lim \sqrt[n]{n} = 1 & \end{array} \right\}$ benützen.

Da $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\forall \delta > 0$, $\exists N_\delta$ so dass

$|\sqrt[n]{n} - 1| < \delta$ $\forall n > N_\delta$.

d.h. $\forall n > N_\delta$, $\boxed{\sqrt[n]{n} < 1 + \delta.}$

Wir wählen $\delta > 0$ so dass $\boxed{q^{1/p} = \frac{1}{(1+\delta)^2}}$

Warum ?: $\quad n^p q^n = \left(n^{p/n} q\right)^n = \left[\left(\sqrt[n]{n}\right)^p \left(q^{1/p}\right)^p\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{n}\right)\left(q^{1/p}\right)\right]^{pn}.$

$$\sqrt[n]{n}\, q^{1/p} \leq (1+\delta)\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^2 = \frac{1}{1+\delta}, \quad \forall n > N(\delta)$$

Wobei gilt $\quad \forall n > N_\delta$

$$a_n = \left(\sqrt[n]{n}\, q^{1/p}\right)^{pn} = \left(\left(\sqrt[n]{n}\, q^{1/p}\right)^p\right)^n \leq r^n$$

mit $\quad r := \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^p < 1.$

Da $r < 1$ $\quad \lim r^n \to 0$

Jetzt sei $\varepsilon > 0$.

Da $\lim r^n = 0$, $\exists N_\varepsilon$ so dass

$\forall n > N(\varepsilon)$ $|r^n - 0| < \varepsilon$.

Dann gilt für $n > \max\{N(\delta), N(\varepsilon)\} = \tilde{N}_\varepsilon$:

$a_n \leq r^n < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim a_n = 0$.

Satz 1 Falls (a_n) konvergiert, ist der Limes eindeutig bestimmt

2 Falls a_n konvergiert, ist $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt.

Vorsichtig! $\{(a_n)\}$ beschränkt $\cancel{\Longrightarrow}$ a_n konvergiert ?

Bsp: $a_n = (-1)^n$ beschränkt und divergent.

Beweis: 1 Seien a und b Grenzwerte von (a_n)

und $a \neq b$

Sei $\varepsilon = \left|\frac{a-b}{3}\right| > 0$

Dann gibt es $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_1$$
$$|a_n - b| < \varepsilon \qquad \forall n > N_2$$

Also, $\forall n > \max\{N_1, N_2\} =: N(\varepsilon)$ gilt

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon = \frac{|a-b|}{3} \cdot 2$$

$$|a-b| < \frac{2}{3}|a-b| \quad ⚡. \implies a = b.$$

Beweis ② $\lim a_n = a$.

Sei $\varepsilon = 1$ und N_1 so dass $|a_n - a| < \varepsilon = 1 \quad \forall n > N_1$

Dann gilt $|a_n| < \varepsilon + |a| = 1 + |a| \quad \forall n > N_1$

Dann ist $\forall n$, $|a_n| \leq \max\{|a|+1, |a_1|, |a_2| \ldots |a_{N_1}|\} =: c$

d.h $|a_n| \leq c \quad \forall n \Rightarrow a_n$ ist beschränkt.

— o —

Sei $\varepsilon > 0$, N_ε so dass $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall N_\varepsilon$

Dann ist $\forall n \quad |a_n| \leq \max|\, |a| + \varepsilon, |a_1|, |a_2| . \; .. \; |a_{N_\varepsilon}|\} = c$

z.B $a_n = 1 + \frac{2}{n}$. Sei $\varepsilon = 1/2$, dann $|1 + \frac{2}{n} - 1| < \frac{1}{2}$ für $n > 4 = N_\varepsilon = N_{1/2}$

$\downarrow$

1

d.h $|a_n - 1| < \frac{1}{2} \quad \forall n > 4$.

d.h $|a_n| < 3/2 \quad \forall n > 4$.

$|a_n| \leq \max\{3/2, a_1, a_2, a_3, a_4\} = \max\{3/2, 3, 2, 5/3, 3/2\} = 3$

$\Rightarrow |a_n| \leq 3 \quad \forall n$.

§3.3 Konvergenz Kriterien.

Satz 3.3.2 Seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ konvergent mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

Dann konvergieren die Folgen $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$, $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ und

(i) $\lim a_n + b_n = a + b$

(ii) $\lim a_n b_n = ab$

(iii) Falls zusätzlich $b \neq 0 \neq b_n \ \forall n$, so gilt $\lim a_n / b_n = a/b$

(iv) Falls $a_n \leq b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$

* (v) Falls zusätzlich $a_n \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$

* (vi) $\lim \lambda a_n = \lambda a$, für $\lambda \in \mathbb{R}$.

z.B. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad \lim a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

§ 3.3. Konvergenzkriterien..

Mit konvergenten Folgen kann man "rechnen"

Bsp. 1) $a_n = \dfrac{n^2 - 2n}{n^2 + n + 1} = \dfrac{\cancel{n^2}(1 - 2/n)}{\cancel{n^2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$

$$= \frac{1 - \frac{2}{n}}{1 + \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1}{1} = 1.$$

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$

2) $a_n = \left(\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n\right) \cdot \dfrac{\left(\sqrt{n^2+6n+1} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2+6n+1} + n\right)}$

$$a_n = \frac{n^2 + 6n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n + 1} + n} = \frac{6n + 1}{\sqrt{n^2+6n+1} + n} = \frac{\cancel{n}(6 + 1/n)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{6}{1+1} = 3.$$

Moral of the story:

$\lim a_n - b_n$ existiert $\not\Rightarrow$ $\lim a_n$, $\lim b_n$ existieren.

$a_n = \sqrt{n^2+6n+1}$. $b_n = n$

a_n, b_n divergent aber $a_n - b_n \to 3$.

<u>Beweis</u> <u>Satz 3.3.2</u> (i) $\underline{\lim a_n = a}$ $\underline{\lim b_n = b.}$

z.z. $\underline{\lim (a_n + b_n) = a + b}$

$\lim a_n = a \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon)$ so dass

$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_1(\varepsilon)$

$\lim b_n = b \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon)$ so dass

$|b_n - b| < \varepsilon \quad \forall n > N_2(\varepsilon)$

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

$\forall n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$.

Da dies gilt für alle $\varepsilon > 0$, folgt auch

$\forall n > \max\{N_1(\frac{\varepsilon}{2}), N_2(\frac{\varepsilon}{2})\} := N(\varepsilon)$ gilt $|(a_n+b_n) - (a+b)| < \varepsilon$.

__Satz__ (Einschliessung – Sandwich Satz)

Seien a_n und b_n Folgen

mit $\lim a_n = a = \lim b_n$ und $a_n \leq b_n \ \forall n$.

Ist c_n eine weitere Folge mit

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n,$$ so konvergiert (c_n),

zwar ebenfalls gegen a.

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & c_n & \leq & b_n \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ a & & & & a \end{array} \Rightarrow \lim c_n = a.$$

Bsp. $a_n = \dfrac{1}{n^2 + \log n + 5}$

$\log n \geq 0$ für $n \geq 1$

Nenner: $n^2 + \log n + 5 \geq n^2$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & a_n & < & \frac{1}{n^2} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Wir haben schon gesehen dass
konvergente Folgen sind beschränkt

<u>aber</u> beschränkte folgen muss nicht konvergent sein.

Aber nächste Satz (Monotone konvergenz Satz)
zeigt dass jede monotone wachsende (fallende)
+ beschränkte Folge konvergiert.

<u>Satz</u> <u>3.3.1</u> (Monotone Konvergenz)

a) Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und monotone wachsend; $(a_{n+1} \geq a_n)$. d.h. mit einen Zahl $b \in \mathbb{R}$ gelte $a_1 \leq a_2 \leq \ldots < b$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dann ist (a_n) konvergent und $\lim a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}$.

b) Sei (b_n) eine monotone fallende nach unten beschränkte Folge. (d.h $\exists\, c \in \mathbb{R}$ mit $b_1 \geq b_2 \ldots > c$)

Dann ist sie konvergent und es gilt

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \inf \{ b_n : n \geq 1 \}.$$

<u>Bmk:</u> Es gibt Folgen deren Konvergenz durch eine strukturelle Eigenschaft gesichert ist, ohne dass man deren Limes „apriori" kennen muss.

Eine strukturelle Eigenschaft ist z.B <u>monotone + beschränkt</u>

Bsp. Verzinsung eines Kapitals K_0 zum

Jahreszinsfuss $p \geq 0$

$K_1 = K_0(1+p)$ bei Jährlicher Verzinsung.

$K_0(1+\frac{p}{2})^2$ bei halbjährlicher Verzinsung.

$K_0(1+\frac{p}{4})^4$ ... viertel - - - .

bei $\frac{1}{n}$-tel Jährliche versinzung : $K_0(1+\frac{p}{n})^n$.

Sei $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \longrightarrow ?$

Mittels Mon. Konvergenz Satz werden wir sehen dass a_n konvergiert. Der Grenzwert wird mit "e" = Eulersche Zahl bezeichnet.

Behauptung (1): (a_n) ist mon. wachsend. $a_n \leq a_{n+1}$

Beweis:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\substack{\text{Binomische} \\ \text{Lehrsatz}}}{=} 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)$$

$$+ \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

(a).

Nun ist $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

Auch gilt $\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right).$

$\vdots$

$a_n \leq a_{n+1}$ ∎.

$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \cdots$

<u>Behauptung</u> 2 a_n ist auch nach oben beschränkt.

$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1 \quad \forall\ k \leq n.$

$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\frac{1}{n^n}$

$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

Nun, ist $\underline{n! \geq 2^{n-1}}$ $n \geq 1$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2.$

$$a_n \leq 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{<1.} < 3$$

$$\left.\begin{aligned} s_n &:= \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2^2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ 2s_n &= 1 + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2^2}} + \cdots \cancel{\tfrac{1}{2^{n-2}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_n = 2s_n - s_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$$

Deswegen $2 \leq a_1 \leq a_2 \cdots < 3.$

$$2 \leq a_n < 3 \quad \forall n \geq 1.$$

mittels Mon. Konv Satz, ist a_n konvergiert und $2 \leq \lim a_n \leq 3$. Diese Grenzwert nennen wir Eulersche Zahl "e"

$$\boxed{\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e}$$