Beispiele:

① $\lim \frac{1}{n} = 0$

② $\lim q^n = 0$, $0<q<1$, $q \in \mathbb{R}$

③ $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

④ $\lim n^p q^n = 0$ $0<q<1$, $n \in \mathbb{N}$

⑤ $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Satz: ① (a_n) konvergiert $\Longrightarrow$ (a_n) ist beschränkt

② (a_n) konvergiert $\Longrightarrow$ Der Limes ist eindeutig bestimmt

Bmk (a_n) ist beschränkt $\not\Longrightarrow$ (a_n) konvergiert

Aber

Satz (a_n) ist beschränkt + monotone $\Longrightarrow$ (a_n) ist konvergent

(Monotone Konvergenz Satz)

d.h. Für (a_n) monotone : (a_n) ~~konvergent~~ $\Longleftrightarrow$ (a_n) ist beschränkt

Mit konvergente Folgen kann man "rechnen"

Satz Seien $(a_n), (b_n)$ konvergent mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$

Dann konvergieren die Folgen $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$ und $(a_n b_n)_{n \geq 1}$ und

1. $\lim a_n + b_n = a + b$
2. $\lim a_n b_n = ab$
3. Falls zusätzlich $b \neq 0 \neq b_n$ $\forall n$, so gilt $\lim a_n / b_n = a/b$
4. Falls $a_n \leq b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$
5. Falls zusätzlich $a_n \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

Satz Seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim a_n = \lim b_n = A$ und $a_n \leq b_n$.

Ist (c_n) eine weitere Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ $\forall n$, so konvergiert (c_n), zwar ebenfalls gegen A

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \leq & c_n & \leq & b_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & & A & & A \end{array} \implies \lim c_n = A$$

Bsp 3.3.2. (III) Sei a_n rekursive definiert wie folgt

Sei $c \geq 1$, $c \in \mathbb{R}$,

$$a_1 = c \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \qquad n \geq 1$$

Behauptung: $\lim a_n$ existiert.

und $\lim a_n = \sqrt{c}$

Bmk: Diese Folge, gibt auch die Bestimmung der positiven Quadratwurzel $\sqrt{c}$ einer reellen Zahl $c > 0$.

Warum? $\sqrt{c}$ ist eine Lösung von

$$x^2 = c$$

Dazu äquivalent ist

$$x^2 = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{c}{2}$$

Division durch x

$$x = \frac{x}{2} + \frac{c}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) =: f(x)$$

Diese Gleichung ist eine "Fixpunktgleichung" für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}(x + c/x)$

Die zugehörigen Fixpunktiteration

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad x_0 = c > 0.$$

$x_{n+1} := f(x_n)$, x_0 gegeben

Um die Lösung der Gleichung $x^2 = c$ zu finden

können wir mit einen "Guess" beginnen, sei guess $= c$

START $x = c$

IF $x^2 \cong c$ THEN STOP , RETURN x

ELSE $x := \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$

REPEAT

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \qquad a_1 = c.$$

$\boxed{\underline{\text{Behauptung}}: \quad a_{n+1}^2 \geq c} \quad \forall n \geq 1$

d.h a_n ist nach unten beschränkt $(a_n \geq \sqrt{c})$.

<u>Beweis</u>: $$(a_{n+1})^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2 + c}{a_n}\right)\right)^2 = \left(\frac{2a_n^2 - a_n^2 + c}{2a_n}\right)^2$$

$$= \left(a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2.$$

$$(a_{n+1})^2 = a_n^2 + (c - a_n^2) + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 = c + \left(\frac{(c - a_n^2)}{2a_n}\right)^2 \geq c$$

∎.

Behauptung 2 $\qquad \underline{\underline{a_{n+1} \le a_n}}$ d.h (a_n) ist mon. fallend.

$$a_{n+1}^2 \ge c \implies a_{n+1} \ge \frac{c}{a_{n+1}}$$

Insbesondere $\quad \dfrac{c}{a_n} \le a_n$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \le \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n .$$

$$\implies a_{n+1} \le a_n . \qquad \blacksquare$$

Behauptung 1 + Behauptung 2 $\xRightarrow[\text{satz}]{\text{mon. konv.}}$ $\lim a_n$ existiert.

(a_n) ist nach unten beschränkt + monotone fallend

Sei $a = \lim a_n$. Da $a_n^2 \geq c \quad \forall n$

folgt $a^2 \geq c$

Aus $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$

folgt

$$\lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \lim\left(\frac{c}{a_n}\right)\right)$$

$$\| $$

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{a}\right)$$

$$2a^2 = a^2 + c \Rightarrow a^2 = c \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{c}.}$$

$\blacksquare$.

Beweis der Mon. Konv. Satz.

Setze $A = \{a_n \mid n \geq 1\}$, $A \neq \emptyset$

z. zeigen: (A nach oben beschränkt + monotone wachsend $\Longrightarrow$ $\lim a_n$ existiert).

Nach Annahme A ist nach oben beschränkt

d.h $\exists\, C$ mit $a_n \leq C$ $\forall n \geq 1$.

Nach Satz 2.3.1 (Jede nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum)

existiert $a := \sup A = \sup \{a_n : n \geq 1\}$.

Behauptung: $\lim a_n = a$.

Sei $\varepsilon > 0$, dann $a - \varepsilon$ keine obere Schranke und desuegen gibt es $n_\varepsilon \geq 1$ mit $a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$

Aus monotonität folgt

$$a_n > a_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon$$

Auch gilt $\quad a + \varepsilon > a = \sup A \geq a_n \quad \forall n.$

Folgt somit $\quad \forall n > n_\varepsilon \quad a - \varepsilon < a_n < a < a + \varepsilon$

d.h $\quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$

d.h. Für alle $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ so dass $\forall n > n_\varepsilon$

$$|a_n - a| < \varepsilon \implies \lim a_n = a \quad \blacksquare.$$

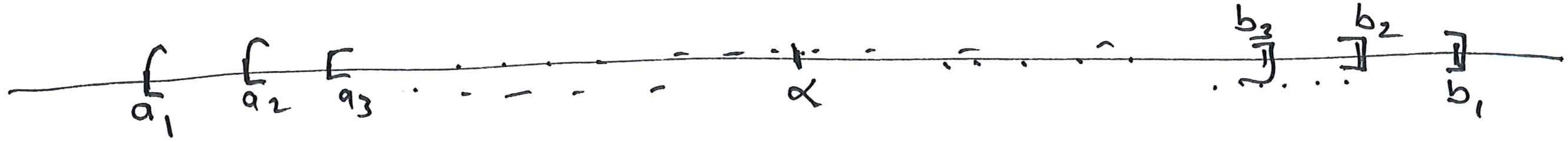
<u>Bmk</u>: Eine wichtige Folgerung des Mon. Konv. Satz ist das Prinzip der Intervallschachtelung (Principle of nested Intervals).

<u>Satz</u>: Sei (a_n) eine monotone wachsende reelle Folge und (b_n) eine monotone fallende reelle Folge mit

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind beide Folge konvergent.

Gilt weiterhin $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, so haben (a_n) und (b_n) denselben Grenzwert. d.h es gibt $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\lim a_n = \alpha = \lim b_n$.



Bsp. (AGM)

- Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) rekursiv.

$a_0 := a$ $\qquad$ $b_0 := b$

$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}$ $\qquad$ $b_{n+1} := \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$. $n \geq 0$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden eine Intervallschachtelung und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) < \frac{b_n - a_n}{2}$$

Das gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n) heisst <u>Arithmetisch-geometrisch Mittel</u> von a und b.

§ 3.4. Teilfolgen und Häufungspunkte.

subsequences — cluster points.

Defn. Sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, und

$\ell : \mathbb{N} \to \Lambda \subset \mathbb{N}$, $n \to \ell(n)$ eine strikt monotone wachsende Folge von Natürliche Zahlen.

Die Verkettung Λ $(a_{\ell(n)})$ von $\ell(n)$ und a_n heisst eine Teilfolge von a_n.

Wir beginnen mit

a_n : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ... , a_{101}, a_{102}, ...

Wir definieren eine neue Folge mit einigen Elementen un a_n
a_1, a_3, a_5, . . . a_{101} . . . — . ist eine Teilfolge.

Richtig oder Falsch?

$$\boxed{\lim a_n = a \iff \underline{\text{Jede}} \text{ Teilfolge konvergent und konvergent gegen } a.}$$ Richtig

<u>Beweis</u>: Übung.

$\left(12\frac{1}{2}\right)$

<u>Bsp.</u> (1) $a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$ ist eine Teilfolge von a_n

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ " " "

$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ " " "

(2) $(-1)^n = a_n = 1, -1, 1, -1, \ldots$ divergent.

$1, 1, \ldots \longrightarrow 1$ Häufungspunkte

$-1, -1, -1 \longrightarrow -1$

$1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ .$ – divergent

<u>Defn.</u> $a \in \mathbb{R}$ heisst <u>Häufungspunkt</u> von $(a_n)_{n \geq 1}$ falls $(a_n)_{n \geq 1}$ eine gegen a konvergente Teilfolge $(a_{\ell(n)})$ besitzt.

d.h Falls $\lim\limits_{\ell \to \infty} a_\ell = a$, $\ell \in \Lambda \subset \mathbb{N}$.

$$\ell : \mathbb{N} \longrightarrow \Lambda$$
$$n \longrightarrow \ell(n).$$

<u>Bsp.</u> $a_n = (-1)^n$ $-1, 1$ sind Häufungspunkte.

(a_{2n}) (a_{4n}) (a_{6n}) - - - $\rightarrow 1$

(a_{2n+1}) $\rightarrow -1.$

~~Satz~~

Wir werden die Menge der Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ näher studieren. Insbesondere zeigen wir dass für beschränkte Folgen nicht leer ist.

<u>Satz 3.4.1</u> (Bolzano - Weierstrass)

Jede beschränkte Folge (a_n) besitzt eine konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

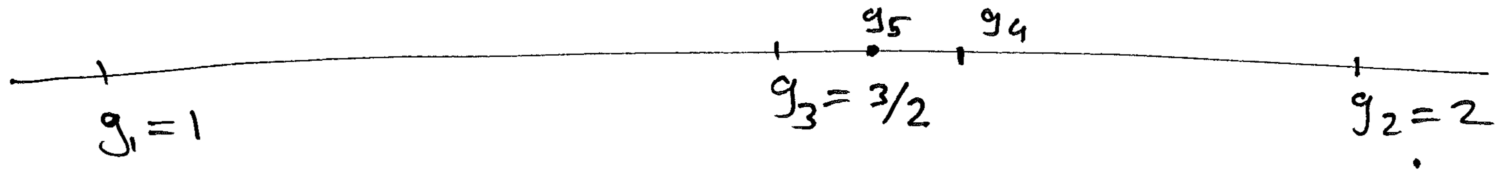
<u>Bmk</u>: a_n beschränkt $\not\Rightarrow$ a_n konv.

$$a_n \text{ beschränkt} \xRightarrow[\text{Weierstrass}]{\text{Bolzano}} \exists \text{ Teilfolge } (a_{\ell(n)}) \text{ die konvergiert.}$$

Bsp 3.4.3. Wir definieren rekursiv

$$g_1 = 1$$

$$g_{n+1} = 1 + \frac{1}{g_n} \qquad n \geq 1$$



$g_1 < g_2 \qquad g_2 > g_3 \qquad g_3 < g_4.$

So ist die Folge nicht monotone.

Offensichtlich, gilt $g_n \geq 1$ und $g_n \leq 2$

d.h (g_n) ist beschrankt.

Es sieht so aus dass $g_2 > g_4 > g_6 \dots$

und $g_1 < g_3 < g_5 \dots$

„Ziel ~~Goal~~" (1). Teilfolge (g_{2n}) (g_{2n+1}) sind monotone ✓

(2) (g_{2n}) (g_{2n+1}) sind beschränkt, da (g_n) beschränkt ist ✓

(3) Nach mon. konv. Satz $\Rightarrow$ $\lim g_{2n} = a$ existiert ✓

$\lim g_{2n+1} = b$ existiert.

(4) $a = b$

(1) + (2) + (3) + (4) $\Longrightarrow$ $\lim g_n = a$.

Bmk: Sei (a_n) eine Folge und $\lim a_{2n} = a$, $\lim a_{2n+1} = a$.

Dann ist a_n konvergent und gilt $\lim a_n = a$

Beweis: Übung.

$$g_{n+2} = 1 + \frac{1}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{g_n}} = 1 + \frac{1}{\frac{g_n+1}{g_n}} = 1 + \frac{g_n}{g_n+1}$$

$$= \frac{g_n + 1 + g_n}{g_n + 1} = \frac{2g_n + 2 - 1}{g_n + 1} = 2 - \frac{1}{g_n + 1}$$

$$g_{n+2} = 2 - \frac{1}{g_n + 1}$$

Daraus folgt $\forall n \geq 3$

$$g_{n+2} - g_n = \left(2 - \frac{1}{g_n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{g_{n-2}+1}\right) = \frac{1}{g_{n-2}+1} - \frac{1}{g_n+1}$$

$$= \frac{g_n - g_{n-2}}{(g_{n-2}+1)(g_n+1)}.$$

Nun, ist $g_3 - g_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$ und somit ist

$g_{2k+3} - g_{2k+1} > 0. \Rightarrow g_{2k+3} > g_{2k+1}$ d.h.

$17\frac{1}{2}$

die Teilfolge $(g_{2k+1})_{k\geq 0}$ ist mon wachsend $\nearrow$

Analog da $g_4 - g_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0$, folgt

$g_{2k} - g_{2k-2} < 0 \quad \forall k \geq 0$

d.h die Teilfolge $(g_{2k})_{k\geq 0}$ ist mon. fallend $\searrow$.

$(g_{2k+1})_{k\geq 1}$, $(g_{2k})_{k\geq 0}$ sind auch beschränkt.

Nach mon. konv satz $\lim g_{2k+1} =: b$

$\lim g_{2k} =: a$.

$$b = \lim g_{2k+1} = \lim \left(1 + \frac{1}{g_{2k}}\right) = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow \boxed{a+1 = ab}$$

Analog

$$a = \lim g_{2k} = \lim \left(1 + \frac{1}{g_{2k-1}}\right) = 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow b+1 = ab.$$

$$\Rightarrow a = b$$

$$\lim g_{2n} = a = \lim g_{2n+1} \underset{\text{Bmk Obung}}{\Longrightarrow} \lim g_n = a.$$

Woraus folgt $a+1 = ab = a^2$

$$a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$ "Golden ratio"

Beweis (Bolzano _ Weierstrass)

Beweis 1 Im Skript.

Beweis 2 Sei a_n beschränkt. Dann gibt ein Interval $[A, B]$ mit $\forall n$ $a_n \in [A, B]$.

Wir werden eine Intervalsschachtelung definieren so dass jede Interval unendlich viele Folgenglieder hat.

Betrachte nun die Folgende Bisektionsmethode.

$A_1 := A$

$B_1 := B$.

For $k = 1, 2, \ldots$

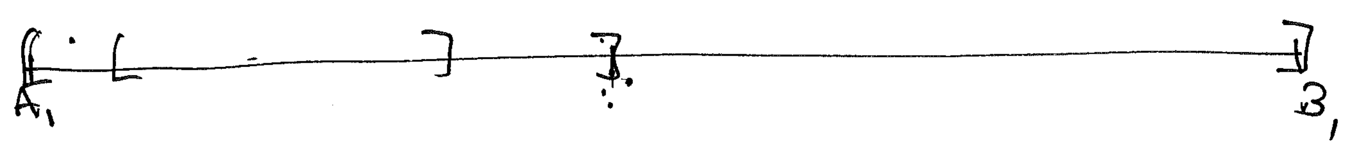
$C_k := (A_k + B_k)/2$.

IF $\{n : a_n \in [A_k, C_k]\}$ unendlich THEN

$A_{k+1} := A_k \qquad B_{k+1} := C_k$

ELSE

$A_{k+1} := C \qquad B_{k+1} := B_k$.



__Beachtung:__ Die Folgen (A_k) und (B_k) bilden eine Intervallschachtelung d.h.

$$\forall k \quad A_k \leq B_k.$$

Sei $\lim A_k = a$, $\lim B_k = b$.

Da $\underset{\downarrow}{B_{k+1}} - \underset{\downarrow}{A_{k+1}} = \frac{B_k - A_k}{2}$ gilt

$$b - a = \frac{b-a}{2} \Rightarrow b - a = 0$$

$$\Rightarrow \underline{b = a}.$$

__Frage:__ OK, Aber wo ist die Teilfolge von a_n?

Nun definieren wir eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) wie folgt

Wir nehmen als $a_{n_1} = a_1 \in [A_1, B_1]$

(d.h. Setze $n_1 = 1$)

Es gibt noch unendlich viele Folgenglieder in $[A_2, B_2]$

Wähle $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$

$\vdots$

d.h.

> Setze $n_1 := 1$
>
> FOR $k = 2, 3, 4, \ldots$
>
> Wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$

Wegen $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k \quad \forall k, \quad \lim A_k = \lim B_k = a$

gilt dann auch $\lim a_{n_k} = a$

(Sandwich Satz).