Satz (Monotone Konvergenz Satz)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monotone Folge. Dann gilt

$(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

Satz (Bolzano - Weierstrass)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt eine Konvergente Teilfolge, also auch einen Häufungspunkt.

§ 3.5 Cauchy Kriterium.

Defn: Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ heisst **Cauchy Folge**, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so dass

$\forall n, m > N$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Satz 3.5.1 (Cauchy Kriterium)
Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Die Folgenden Aussagen sind äquivalent
(i) (a_n) ist konvegent
(ii) (a_n) ist Cauchy-Folge.

Beweis: 1 (i) $\Longrightarrow$ (ii)

z.z.: (a_n) konv $\Longrightarrow$ (a_n) Cauchy.

(a_n) konv $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $N(\frac{\varepsilon}{2})$ mit

$|a_n - a| < \varepsilon/2 \quad \forall n > N(\frac{\varepsilon}{2})$.

Falls $\forall n, m > N(\varepsilon/2)$, denn gilt

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ a_n ist Cauchy Folge.

2 (ii) $\Longrightarrow$ (i) z.z: (a_n) Cauchy $\Longrightarrow$ (a_n) konv

Strategie: 1 Zeige dass (a_n) Cauchy $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt

2 Mittels Bolzano Weierstrass, sei $(a_{e(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim a_{e(n)} = a$.

Dann $|a_n - a| = |a_n - a + a_{\ell(n)} - a_{\ell(n)}|$

$$\leq |a_n - a_{\ell(n)}| + |a_{\ell(n)} - a| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{Da } a_n \text{ Cauchy ist}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{a_{\ell(n)} \to a.}$$

<u>Bmk</u>: Wir können das Cauchy Kriterium in beiden Richtung anwenden.

d.h: a_n nicht Cauchy $\Rightarrow$ a_n divergiert.

4

Bsp 3.5-1*. Die Harmonische Reihe.

Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Behauptung: a_n ist divergent

Nun zeigen wir dass (a_n) kein Cauchy Folge ist, deswegen a_n divergent.

$$a_{2n} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{} .$$

$$= \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow a_n$ ist kein Cauchy Folge $\Rightarrow a_n$ divergent.

5.

Im gegensatz zu Harmonische Reihe, die alternierende Harmonische Reihe ist konvergent

<u>Bsp:</u> Sei $b_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

<u>Behauptung</u> b_n konvergiert.

Wir werden zeigen dass die Teilfolgen (b_{2k}) und (b_{2k-1}) sind monotone und beschränkt

$$b_{2k} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-2}\right)}_{b_{2k-2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)}_{>0}$$

$$\Rightarrow \quad b_{2k} > b_{2k-2} > 0 \quad \forall\, k \geq 1. \qquad (A)$$

b_{2k} ist monot. wachsend.

Analog
$$b_{2k+1} = b_{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$$
$$= b_{2k-1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k}\right)}_{<0}$$

$$b_{2k+1} < b_{2k-1} \qquad (B)$$

Zudem gilt
$$b_{2k} = b_{2k-1} - \frac{1}{2k}$$
also
$$b_{2k} < b_{2k-1} \qquad (C).$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} = b_2 < b_4 \cdots < b_{2k-2} < b_{2k}}_{A} < b_{2k-1} < \underbrace{b_{2k-3} \cdots < b_1 = 1}_{B}$$

d.h die Teilfolgen (b_{2k}), (b_{2k-1})

sind monotone und beschränkt

Nach mon. konv. Satz, konvergieren die beiden Teilfolgen.

Da $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |b_n - b_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$

$$\begin{array}{ccccc} |b_{2n} & - & b_{2n+1}| & = & \frac{1}{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & b & & 0 \end{array} \implies \begin{array}{c} \lim b_{2n} = \lim b_{2n+1} = a. \\ \Downarrow \\ \lim b_n = a. \end{array}$$

Bsp. (Leibniz Reihe)

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$, mit $a_{k-1} \geq a_k$

und $\lim a_n = 0$.

[(z.B.) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad a_{n-1} \geq a_n$

$\lim a_n = 0$.]

Die Leibniz Reihe ist definiert als

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k. = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - \dots + (-1)^{k+1} a_k.$$

Dann :

s_n konvergiert : d.h. s_n besitzt einen Limes s und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|s_n - s| \leq a_{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$\boxtimes$.

§ 3.6. Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Die Theorie der Folgen in $\mathbb{R}$ lassen sich leicht auf Folgen in $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C}$ übertragen.

$\|\cdot\|$ bezeichnet die Euc. Norm auf $\mathbb{R}^d$ oder $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2} \qquad \|z\| = \|x+iy\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

<u>Defn.</u> Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$n \longrightarrow a_n = (a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \dots a_n^{(d)}).$$

Sei $a = (a^1, a^2 \dots a^d) \in \mathbb{R}^d$.

(1) Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ heisst <u>beschränkt</u> falls es $C > 0$ gibt, $(C \in \mathbb{R})$ mit

$$\|a_n\| \leq C \quad \forall n \geq 1$$

(2) Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ <u>konvergiert</u> gegen $a \in \mathbb{R}^d$, falls für jedes $\varepsilon > 0$, einen index $N(\varepsilon)$ gibt so dass

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

d.h $\lim_{n \to \infty} \|a_n - a\| = 0$.

Satz Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$.

Es sind äquivalent

(1) $a_n \to a = (a^1, \ldots a^d)$

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, d\} : a_n^{(i)} \to a^{(i)}$

Bsp. ① $a_n = \begin{pmatrix} 1/n \\ 2/n \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$

$\lim a_n = \begin{pmatrix} \lim 1/n \\ \lim 2/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② $a_n = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n+1}{2n^2+5} \\ n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \infty \end{pmatrix}$:

Dann ist a_n divergent da (n) divergent ist

__Bmk__: $(a_n) \subset \mathbb{R}^d$ konv, $\lim a_n = a$.

Dann (1) der Limes ist eindeutig bestimmt

(2) a_n ist beschränkt.

__Satz__ Es sind äquivalent

(1) a_n konvergent

(2) a_n Cauchy Folge.

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ so dass

$\|a_n - a_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N(\varepsilon)$.

Satz **Bolzano Weierstrass.**

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bmk. Der Konvergenzbegriff verträgt sich sehr gut mit Vektorraum Struktur.

Seien (a_n), (b_n) konv. Folgen in $\mathbb{R}^d$ mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt (1) $\lim (a_n + b_n) = a + b$

(2) $\lim \lambda a_n = \lambda a$.

Für komplexe Folgen (z_n), $(w_n) \subset \mathbb{C}$ $\lim z_n = z$, $\lim w_n = w$

Dann gilt (a) $\overline{z_n} \to \overline{z}$, (b) $\|z_n\| \to \|z\|$ (c) $z_n w_n \to zw$.

§ 3.7 Reihen (Series)

(Folgen - sequence).

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$

Mittels a_n können wir eine neue Folge definieren; die Folge der Partielsummen s_n

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Defn 1 Eine **Reihe** ist eine unendliche Summe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$ einer Folge.

2 Wir sagen **die Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge $(s_n)_{n\geq 1}$, die Folge der Partialsummen, konvergiert.
In diesem Fall wird deren Limes $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

$$\lim s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Der Grenzwert $s = \lim s_n$ heisst der **Wert** oder die Summe der Reihe.

__Bsp.__ (1) __Geometrische Reihe.__

Für $q \in \mathbb{R}$ betrachten wir

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots$.

$a_k = q^k$

$$
\begin{aligned}
S_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\
-\quad q S_n &= q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1} \\
\hline
S_n(1-q) &= 1 - q^{n+1} \implies S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.
\end{aligned}
$$

Also, __für $|q|<1$__, $q^{n+1} \to 0$, $S_n \to \frac{1}{1-q}$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q|<1$

und ihre Summe ist $1/1-q$.

$\underline{q=1}$. , $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1+1+\dots \to \infty$

$s_n \to \infty$ divergent.

$\underline{q=-1}$ $\quad s_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = \text{ungerade} \\ 1 & \text{falls } n = \text{gerade.} \end{cases}$

$s_0 = 1,\ s_1 = 1-1,\ s_2 = 1-1+1$.

deswegen s_n divergiert.

$|q|>1$, $\quad s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \infty$ divergent.

<u>Bsp.</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$ ...

Bmk Weglassen endlich vieler Glieder:

Für Frage, ob eine Reihe konvergiert ist genau ~~bei~~ einer Folge das "Verhalten am Anfang" gleichgültig.

Für beliebiges $m \geq N_0$ gilt, dass

$$\sum_{k=N_0}^{\infty} a_k \text{ konv} \iff \sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Im gegensatz zur Situation bei Folgen <u>ändert sich</u> aber der Grenzwert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underline{\underline{2}} \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Für Folgen: Sei $\lim a_n = \underline{\underline{a}}$, $b_n := a_{N_0+n}$

Dann ist $\lim b_n = \underline{\underline{a}}$

Wichtige Bsp für divergente Reihe

Die Harmonische Reihe.

$a_n = \frac{1}{n}$, $\quad s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Da s_n nicht Cauchy ist, ist sie Divergent, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

3 Die <u>Teleskopreihe</u>

Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \dots$$
$$+ \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$s_n \to 1$. Also $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.