Konvergenz Kriterien für Reinen

1) **Cauchy Kriterium:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \iff \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \quad \forall n \geq m$$

2) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \implies \lim a_k = 0.$$

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ ist divergent, da $\lim \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0$.

3) **Majorantenkriterium** Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen wobei

1) Es gibt k_0 so dass $0 < |a_k| \leq b_k \quad \forall k > k_0$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Bsp $\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$ ist konvergent, da für $k \geq 2$ $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)(k)}$

und $\sum \frac{1}{(k-1)(k)}$ ist konv.

4) Quotientenkriterium: Sei $a_k \neq 0$ $k \in \mathbb{N}$

a) Falls $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, so ist $\sum a_k$ konv.

b) Falls $\liminf \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, so ist $\sum a_k$ div.

Bmk Falls $\lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$, Dann gilt

$L < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv

$L > 1 \Rightarrow \sum a_k$ div.

$L = 1 \Rightarrow$ kein INFO.

Bsp $\operatorname{Exp}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$.

5 Wurzelkriterium Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge

a) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

b) Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Bmk Falls $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = L$, Dann gilt:

$L < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv

$L > 1 \Rightarrow \sum a_k$ div.

$L = 1 \Rightarrow$ kein INFO.

Defn. Sei $(c_k)_{k\geq 1}$ ein Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Betrachte die **Potenzreihe** in $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) := c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots\cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Wann ist eine Potenzreihe konvergent?

Satz 3.7.4. Die Potenzreihe $p(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z| < \rho\,(\text{rho}) = \frac{1}{\limsup |c_k|^{1/k}} \in [0, \infty]$$

Sie ist divergent für alle $|z| > \rho$.

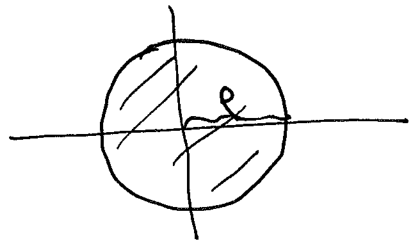
Bmk **Konvention**: 1 Falls $\{\sqrt[k]{|c_k|}, k \geq 1\}$ nicht beschränkt ist, setzen wir $\rho = 0$.

2 Falls $\{\sqrt[k]{|c_k|}, k \geq 1\}$ beschränkt ist und zudem $\limsup \left(\sqrt[k]{|c_k|}\right) = 0$, setzen wir $\rho = \infty$.
d.h die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

$\underline{\lim} \{|c_k|^{1/k}\}$ existiert., $= 0$

Satz 3.7.4: Die Potenzreihe $\sum c_k z^k$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho := \frac{1}{\overline{\lim} |c_k|^{1/k}}$.

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$



Bmk Die Konvergenzbereich von eine Potenzreihe, $|z| < \rho$, ist ein Kreis.

Bsp $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine Potenzreihe mit $c_k = 1 \quad \forall k$.

$$\rho = \frac{1}{\limsup (c_k)^{1/k}} = \frac{1}{\limsup 1^{1/k}} = 1.$$

$|z| < \rho = 1 \implies \sum z^k$ ist konv

$|z| > 1 \implies \sum z^k$ ist div.

Falls $|z| = 1 \implies \lim z^k \neq 0 \implies \sum z^k$ divergent

. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist konv $\iff |z| < 1$.

Gegeben ist $\sum a_k$

$\boxed{\lim a_k = 0}$?

Nein ↙ ↘ Ja.

$\sum a_k$ divergent.

Majorantenkr. ? Quotientkri ? Wurzelkrit. ?

Manchmal funktionieren weder Quotienten noch Wurzelkrit.

Bsp 3.7.4 (Riemann Zeta Funktion)

For $s > 0$ betrachten wir die Reihe

$$\zeta(s) := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und fragen wir nach Konvergenz.

$$a_n(s) = a_n = \frac{1}{n^s}, \; \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)^s}{(n)^s}\right| = \left|\dfrac{n+1}{n}\right|^s \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\[2ex] |a_n|^{1/n} = \left(\dfrac{1}{n^{1/n}}\right)^s \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \end{array}\right\}$$

Funktioniert weder Quotienten noch Wurzelkriterium.

<u>Also</u> für $0 < s \leq 1$ gilt $\frac{1}{k^s} > \frac{1}{k}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} > \sum \frac{1}{k} \longrightarrow \text{divergent}$$

$$\Longrightarrow \sum \frac{1}{k^s} \text{ ist divergent.}$$

(2) Für $s > 1$, werden wir die Idee an, die ~~[illegible]~~ zur Divergenz von $\sum \frac{1}{k}$ führt, ein wenig modifiziert.

Wir hatten für die Harmonische Reihe

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{> \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{= \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{> \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{= \frac{1}{2}.}} + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

__Hint:__ $\sum \frac{1}{k^2}$ ist konvergent

$2 > 1$

$\sum \frac{1}{k^s}$

$s > 1$?

Behauptung: $\sum \frac{1}{k^s}$ ist konv für $s > 1$

Beweis: Wir segmentieren die Reihe auf die selbe Art

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}}_{<\ \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}} + \underbrace{\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}}_{<\ \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}} + \ldots$$

$$< 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{2^{2s}} + \frac{2^3}{2^{3s}} + \ldots \qquad 4 = 2^2$$

$$< 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit $q = \frac{1}{2^{s-1}}$, $|q| < 1$, da $s > 1$

$$\Longrightarrow \quad \zeta(s) < \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q|<1 \right)$$

d.h $\zeta(s)$ ist konvergent falls $s > 1$

ist divergent falls $0 < s \leq 1$

§3.8 Absolute Konvergenz

Wir haben schon gesehen dass

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist aber

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent.

d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv $\not\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv.

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ist divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heisst bedingtkonvergente Reihe (conditionally convergent)

z.B $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ist bedingtkonvergent.

Im Gegensatz zu eine Summe endlich vieler Zahlen, kann bei einer unendliche Summe die Konvergenz verlorengehen oder der Wert der Summe sich ändern, wenn ~~man~~ man eine Reihe umordnet.

$$a_0 + a_1 + \dots + a_5 = a_0 + a_5 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

aber $a_0 + a_1 + \dots \overset{?}{=} a_1 + a_2 + a_0 + a_3 + a_5 + a_4 + \dots$.

Nun, werden wir die Alternierende Harmonische Reihe etwas näher betrachten.

__Defn__. Die Reihe $\sum a_k$ __konvergiert absolut__ (ist absolute konvergent) falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

z.B $\sum \frac{(-1)}{n}$ ist __nicht__ abs. konvergent.

Bei absolute konvergente Reihen, solche wie oben geschriebene "Pathologische" verhältnis nicht auftreten.

Bsp. 3.8.1 Die Reihe $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert,

Aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergiert, $\to \infty$.

Falls $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$, dann $a_n \to \infty$.

d.h. $\forall\, C > 0$, $\exists\, N_c$ s.d. $a_n > C$, $\forall\, n \geq N_c$

Insbesondere. $\forall\, C > 0$, $\exists\, N_c$. so dass $a_{N_c} > C$.

Nun ordnen wir die alt. Harm. Reihe wie folgt

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2k_1}\right)-1 > 1 \quad \text{(Wähle } k_1 \text{ so dass diese differenz } > 1\text{)}.$$

$$\left(\frac{1}{2(k_1+1)}+\frac{1}{2(k_1+2)}+\dots+\frac{1}{2k_2}\right)-\frac{1}{3} > 1 \quad \text{(wähle } k_2 \text{ so dass} \dots > 1\text{)}.$$

$$\vdots$$

$$+\left(\frac{1}{2(k_j+1)}+\dots+\frac{1}{2k_{j+1}}\right)-\frac{1}{2j+1} > 1 \quad \text{(wähle } k_{j+1} \text{ so dass} \dots > 1\text{)}.$$

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} = -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\dots$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}_{\frac{3}{4}}+\underbrace{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{4}}}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\dots-\frac{1}{2k_1}}_{>2}$$

wie oben

$\Rightarrow$ umgeordnete Reihe ist divergent!!

Satz: $\sum |a_n|$ konv. $\Longrightarrow$ $\sum a_k$ konvergent.

Beweis: Sei $b_n := a_n + |a_n| = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n \leq 0 \\ 2a_n = 2|a_n| & a_n > 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$.

Da $\sum |a_n|$ konv ist, ist $\sum b_n$ konvergent.

Aber $a_n = b_n - |a_n|$, und $\sum b_n$ und $\sum |a_n|$ konv.

$\Longrightarrow$ $\sum a_n$ ist auch konvergent.

Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion (Permutation)

Eine <u>Umordnung</u> der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$.

<u>Satz 3.8.)</u> <u>(Umordnung Satz für abs. konv. Reihe)</u>

Sei $\sum a_k$ abs. konv. und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion

Dann ist auch die umgeordnete Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

<u>Beweis</u> Übung.

Bmk Das Quotientenkriterium und Wurzelkrit. sind Kriterien für absolute Konvergenz.

Bsp. ① $\sum_{k=1}^{\infty} k q^k$ ist für $|q|<1$ abs. konv.

Da,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k+1}{k}\frac{q^{k+1}}{q^k}\right| = \left|\frac{k+1}{k}\right| |q| \xrightarrow[k\to\infty]{} |q| < 1$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k q^k &= q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \dots \\ &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots \\ & + q^2 + q^3 + q^4 \\ & + q^3 + q^4 \\ & + q^4 \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$= q\{1+q+q^2+\cdots\}$$

$$+ q^2\{1+q+q^2+\cdots\}$$

$$+ q^3\{1+q+q^2+\cdots\}$$

$$\vdots$$

$$= \{q+q^2+q^3+\cdots\}\{1+q+q^2+\cdots\}$$

$$= q\{\underbrace{1+q+q^2+\cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}\}\{\underbrace{1+q+q^2+\cdots}_{\sum_{k=0}^{\infty} q^k}\}$$

$$= q\left(\frac{1}{1-q}\right)\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Frage: Wie funktioniert das Ausmultiplizieren von Reihen.

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{l=0}^{n} b_l = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_k b_l$$

Satz 3.8.2. Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und seien die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{l=1}^{\infty} b_k$ abs. konv.

Dann konvergiert die Reihe der Produkte absolut mit

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\right) = \sum_{\substack{k=1\\ l=1}}^{\infty} a_k b_l$$

unabhängig von der Summationsreihenfolge.

Kor 3.8.1 (Additionstheorem für Exp)

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(y) = \mathrm{Exp}(x+y)$$

d.h.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$\left(\operatorname{Exp}(x)\right)\left(\operatorname{Exp}(y)\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) \overset{\text{Satz}}{=} \sum_{\substack{k=0\\ l=0}}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!\, l!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k\geq 0,\, l\geq 0\\ \boxed{k+l=n}}} \frac{x^k y^l}{k!\, l!}$$