Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit
- einer beliebigen Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ~~in~~ $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
- dem Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$

<u>Bsp</u> $\quad Exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, mit $z_0 = 0$, $c_n = \frac{1}{n!}$

Konvergenzradius einer Potenzreihe um den Punkt z_0 ist der grösste Zahl ρ definiert, für welche die Potenzreihe für alle $|z - z_0| < \rho$ konvergiert

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \left(|c_n|^{1/n}\right)}$$

(In diesem Zusammenhang definiert man $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$.)

Riemann Zeta Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{ist konvergent falls } s > 1 \\ \text{ist divergent falls } 0 < s \leq 1 \end{cases}$$

Defn Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

Bmk: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv $\not\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv

z.B $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konv aber $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ist divergent

Satz $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv $\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv

d.h $\sum a_k$ konv absolut $\Rightarrow \sum a_k$ konv.

* !!! Für eine nicht absolute konvergierende Reihe die Konvergenz verlorengehen oder der Wert der Summe sich ändern, wenn man sie umordnet

* Aber bei absolute konvergente Reihen, solche "Pathologische" verhältnis nicht auftreten.

Satz Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv und $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Permutation
Dann ist auch die umgeordnete Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ konvergiert und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

Satz Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ und seien die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abs. konv..

Dann konvergiert die Reihe der Produkte absolut mit

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell\right) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell$$

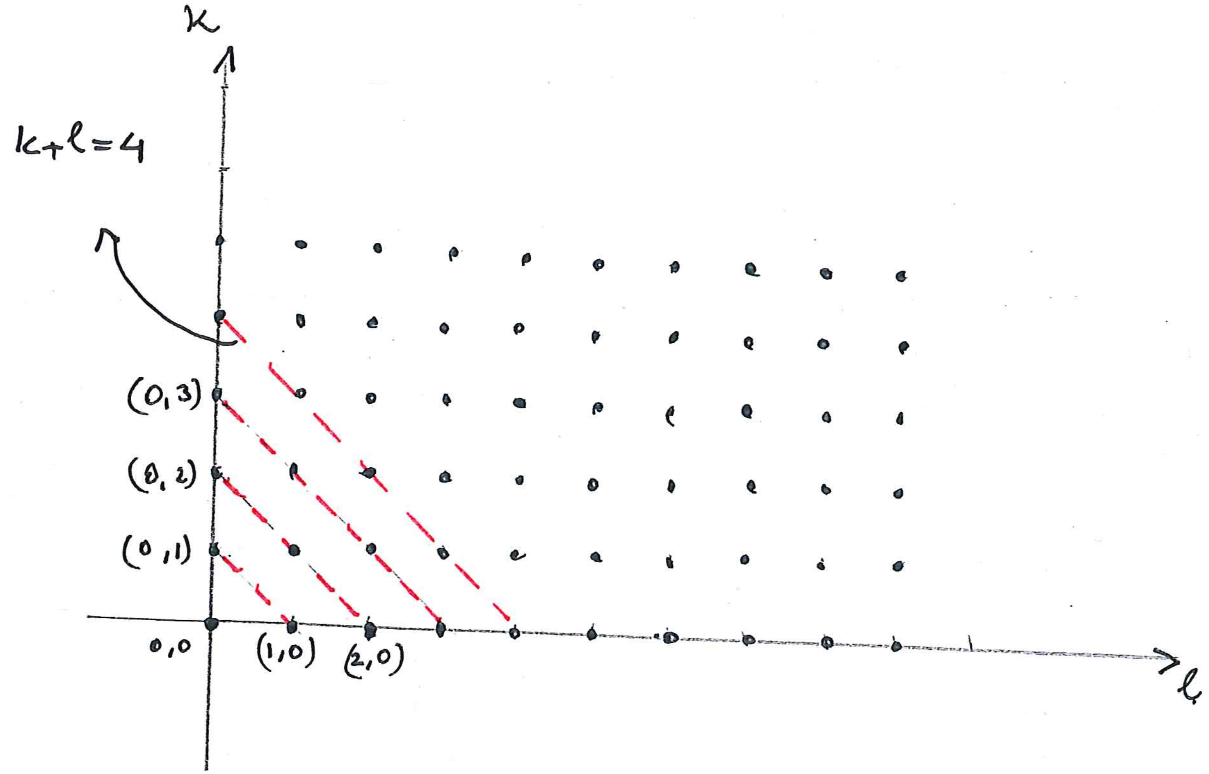
unabhängig von der Summationsreihenfolge

Korollar $\forall\, x,y \in \mathbb{C}$, gilt

$$\operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(y) = \operatorname{Exp}(x+y)$$

$$\left(\mathrm{Exp}(x)\right)\left(\mathrm{Exp}(y)\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) \overset{\text{Satz}}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!\, l!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k \geq 0,\, l \geq 0 \\ \boxed{k+l=n}}} \frac{x^k y^l}{k!\, l!}$$



$$\operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{\substack{k\geq 0\\ \ell\geq 0\\ k+\ell=n}} \frac{x^k y^\ell}{k!\,\ell!}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!}\,\frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} \underset{\text{Bin. Lehrsatz}}{=} (x+y)^n.$$

$$= \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$0! := 1.$

$$\stackrel{?}{=} \operatorname{Exp}(x+y) \stackrel{\parallel}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

6

Satz 3.9.1. $\mathrm{Exp}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Beweis. z.z. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$ so dass $n > N_\varepsilon$

$$\left|\mathrm{Exp}(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| < \varepsilon.$$

Wir wenden Bin. Lehrsatz an.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1^k}{n^k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{a_k^{(n)}} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{Exp}(1)$$

mit $a_k^{(n)} := 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq 1$

$0 < \mathrm{Exp}(1) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

- Für jedes feste k, $a_k^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Somit $(1 - a_k^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für jedes feste k.

$$\mathrm{Exp}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{wobei}$$

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

d.h. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_0 = N_0(\varepsilon)$ so dass

$$|\mathrm{Exp}(1) - s_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N_0$$

Insbesondere gilt $\left|\mathrm{Exp}(1) - \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{k!}\right| < \varepsilon$.

und somit

$$\boxed{\operatorname{Exp}(1) < \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon} \qquad \underline{\forall n > N_0.}$$

Nun, $\quad 1 - a_k^{(n)} \longrightarrow 0, \quad \exists\, N_1 = N_1(\varepsilon)$ so dass

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N_0} 1 - a_k^{(n)} < \varepsilon \qquad \forall n > N_1}$$

$\forall n \geq \max\{N_0, N_1\}$. gilt.

$$0 < \operatorname{Exp}(1) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{k!} + \varepsilon - \sum_{k=0}^{N_0} \frac{a_k^{(n)}}{k!}.$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{k!}\left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N_0} \left(1 - a_k^{(n)}\right) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Exp}(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Bmk. Analog kann man beweisen dass für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Exp}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Für $x \in \mathbb{N}$, oder $x \in \mathbb{Q}$ ist diese einfacher zu sehen.

Satz 3.9.2. $\operatorname{Exp}(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.

Beweis: $\operatorname{Exp}(x)\operatorname{Exp}(y) = \operatorname{Exp}(x+y)$, $\quad \operatorname{Exp}(1) = e$

$$\operatorname{Exp}(2) = \operatorname{Exp}(1+1) = \operatorname{Exp}(1)\operatorname{Exp}(1) = e \cdot e = e^2$$

$\vdots$

Für alle $n \geq 1$ induktive folgt dass $\operatorname{Exp}(n) = e^n$.

$$\operatorname{Exp}(0) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + 0 + 0 \cdots$$

$$\underset{\underset{1 = \mathrm{Exp}(0)}{\shortparallel}}{\mathrm{Exp}(n-n)} = \mathrm{Exp}(n)\,\mathrm{Exp}(-n) = 1 \Rightarrow \mathrm{Exp}(-n) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Sei $p, q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\mathrm{Exp}(1) = \mathrm{Exp}\left(q \cdot \tfrac{1}{q}\right) = \underbrace{\mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{q}\right)\mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{q}\right) \cdots \mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{q}\right)}_{q\text{-mal.}}$$

$$= \left(\mathrm{Exp}(1/q)\right)^q$$

$$\mathrm{Exp}(1/q) = \left(\mathrm{Exp}(1)\right)^{1/q} = e^{1/q}.$$

$$\mathrm{Exp}\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\mathrm{Exp}\left(\tfrac{1}{q}\right)\right)^p = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}.$$

__Bmk.__ For rein imaginäre Argumente $z = iy$ $y \in \mathbb{R}$ mittels Umordnungsatz, können wir $\operatorname{Exp}(iy)$ in Real und Imaginärteil zerlegen.

$$\operatorname{Exp}(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \qquad i^k = \begin{cases} 1 & k \equiv 0 \pmod 4 \\ -1 & k \equiv 2 \ (4) \\ i & k \equiv 1 \ (4) \\ -i & k \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

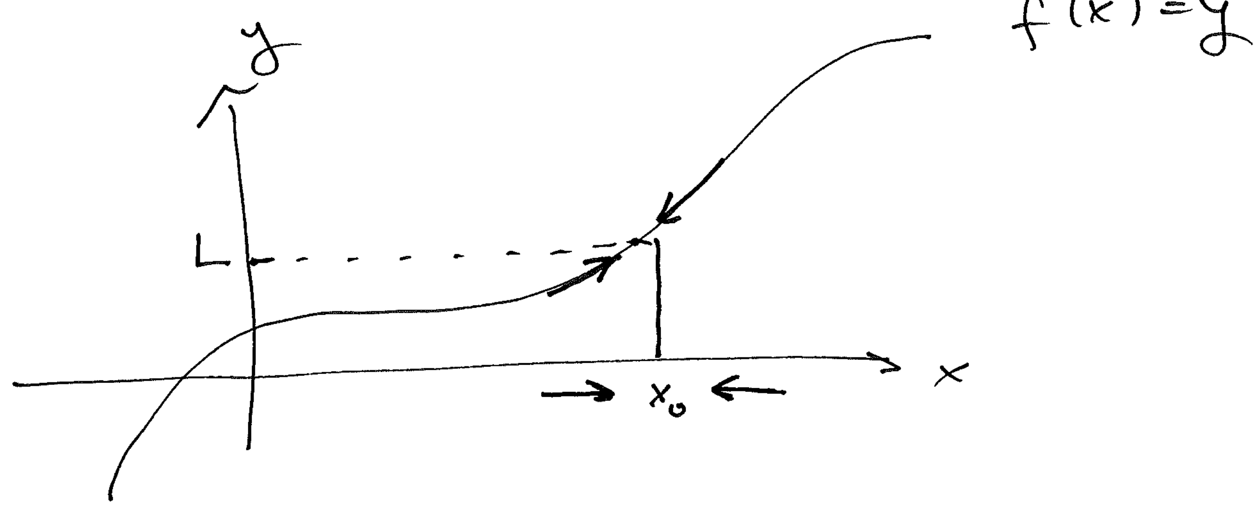
$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell y^{2\ell}}{(2\ell)!}}_{:= \operatorname{Cos}(y)} + i \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}}_{:= \operatorname{Sin}(y)} \qquad \boxed{0! := 1}.$$

$$\mathrm{Exp}(x+iy) = \mathrm{Exp}(x)\,\mathrm{Exp}(iy)$$
$$= \mathrm{Exp}(x)\left[\cos y + i \sin y\right].$$

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}.\, e^{iy} = e^{x}(\cos x + i \sin y).$$

§ 4 Stetigkeit (continuity).

§ 4.1 Grenzwerte von Funktionen.



Defn. Eine Funktion $y=f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 definiert.

Gilt dann für **jede** Definitionsbereich der Funktion liegende und gegen die Stelle x_0 konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$ $\wedge$ mit $\lim x_n = x_0$. stets

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

So heisst <u>L</u> der <u>Grenzwert (Limes)</u> <u>von</u> <u>$y=f(x)$</u> an <u>der Stelle x_0</u>:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Bmk ① Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet

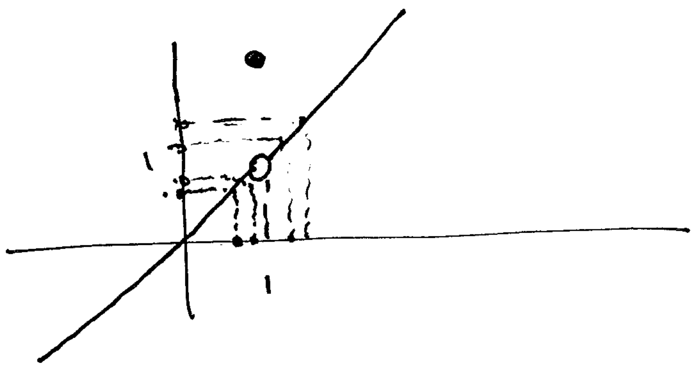
x kommt der Stelle ~~be~~ x_0 beliebig nahe, **ohne**

sie jedoch jemals zu erreichen

Es ist stets $x \neq x_0$.

② Die Funktion $y = f(x)$ muss <u>nicht</u> an der Stelle

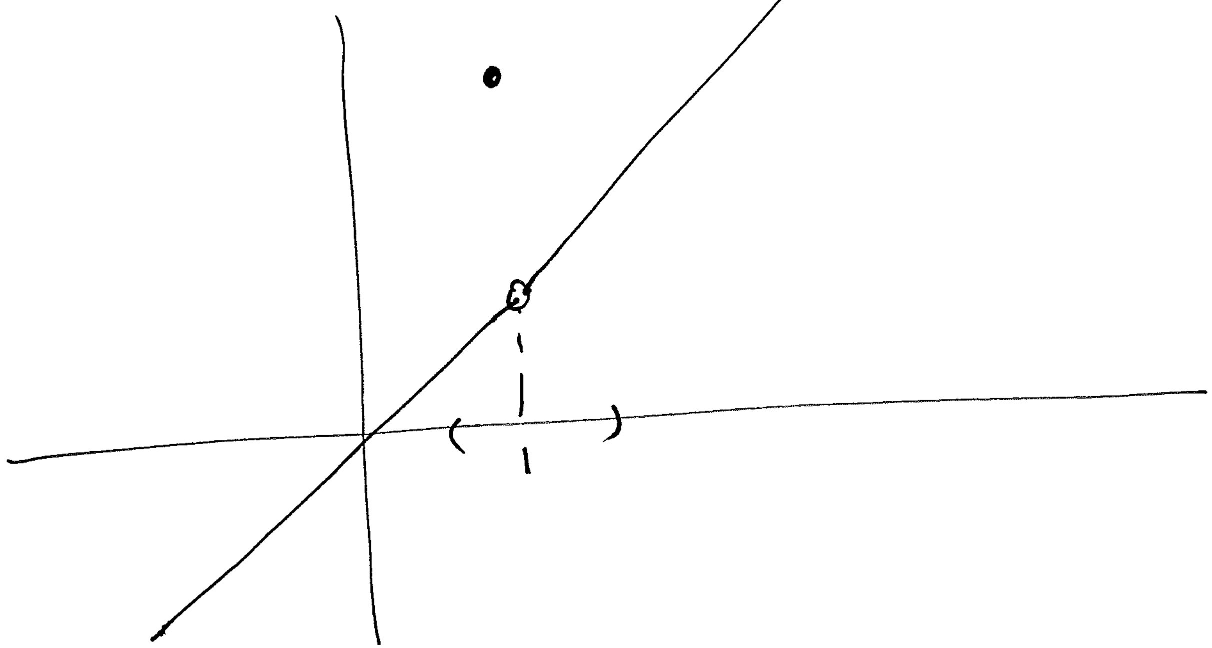
x_0 definiert sein.

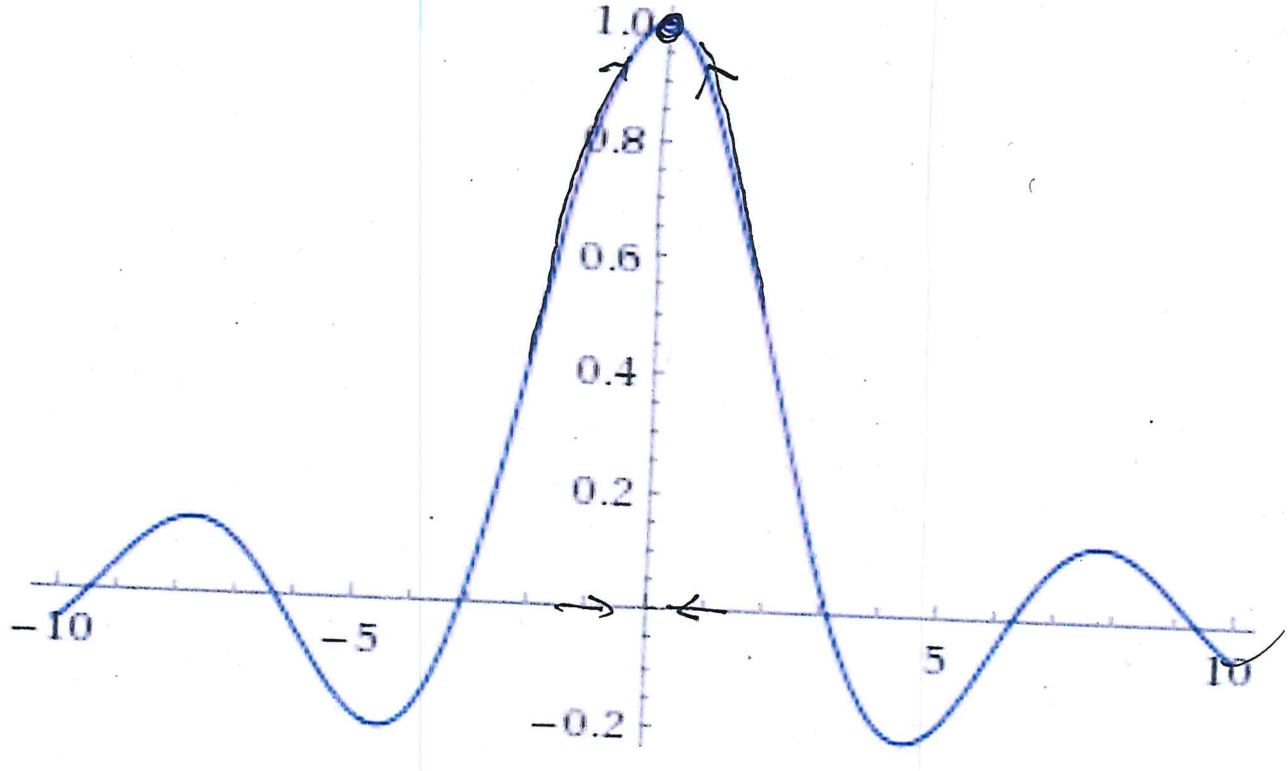


$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \neq 1 \\ 2 & \text{fall } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq 2$$

$$f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}.$$
$$x \to x.$$





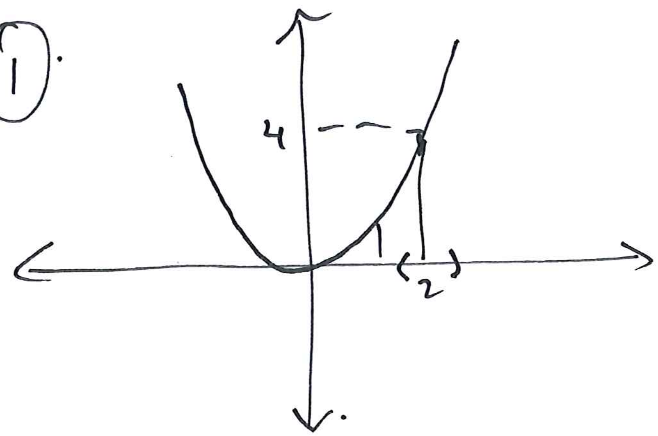
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

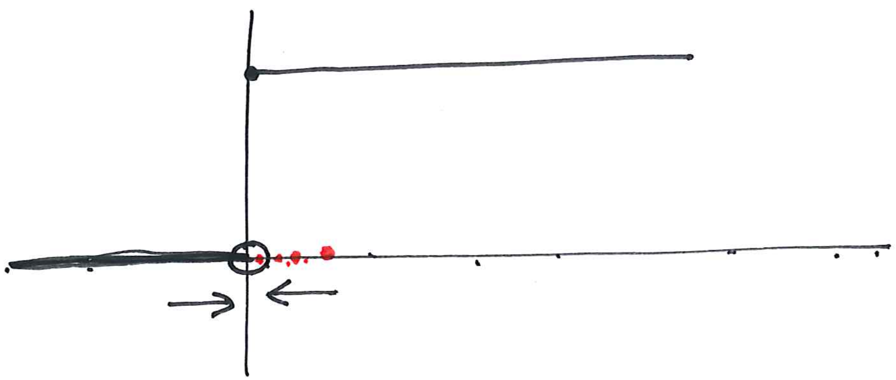
$17\frac{1}{2}$

Bsp. 1.



$f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad \lim x_n \to 0.$

$f(x_n) = f(\frac{1}{n}) = 1. \qquad \lim f(x_n) = 1.$

$\tilde{x}_n = \frac{-1}{n}$ $\qquad \lim \tilde{x}_n \to 0.$

$f(\tilde{x}_n) = f(\frac{-1}{n}) = 0 \qquad \lim f(\tilde{x}_n) = 0.$

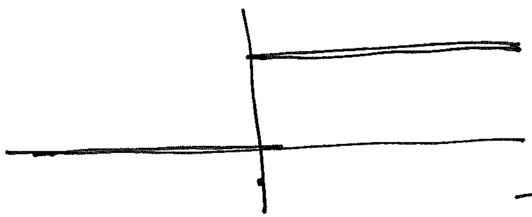
$\lim_{x \to 0} f(x)$ existiert NICHT!.

Defn. Gilt für jede von links her gegen x_0 strebende Folge x_n, $\lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} f(x_n)$ existiert, dann,

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L^-$$

heisst linkseitige Grenzwert

Rechseitige Grenzwert von $f(x)$: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) =: L^+ := \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$



Linkseitige Grenzwert: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = L^- = 0$ existiert

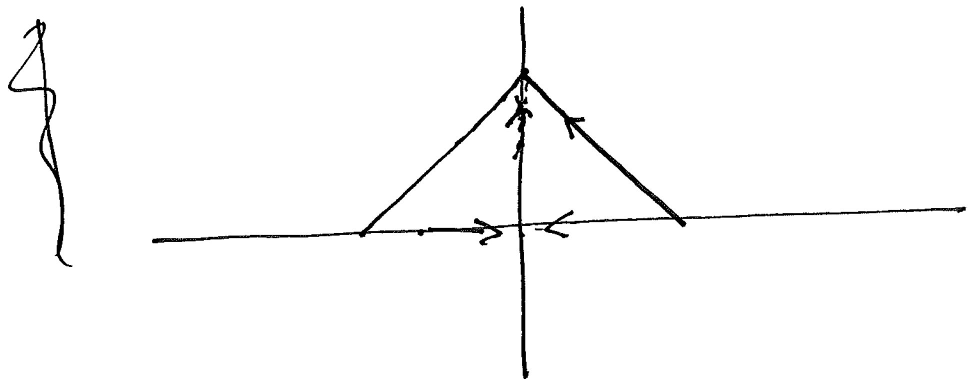
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 = L^+$. existiert

Aber $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht, da $L^- \neq L^+$

Bmk

Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert L, so gilt also

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L .$$



$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 1-x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \quad = \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 1 .$$