Grenzwerte von Funktionen

Defn Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die in einer Umgebung von x_0 definiert ist.

Gilt dann für jede Definitionsbereich der Funktion liegende und gegen die Stelle x_0 konvergierende Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$ stets

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

so heisst L der Grenzwert von f an der Stelle x_0

Wir schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall (x_n)_{n \geq 1} \subset \Omega$ mit $\lim x_n = x_0$, $x_n \neq x_0$: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$

Bmk ① Der Grenzübergang $x \to x_0$ bedeutet:
x kommt der Stelle x_0 beliebig nahe, ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

② Die Funktion $f(x)$ muss <u>nicht</u> an der Stelle x_0 definiert sein.

Defn (Linkseitige Grenzwert) (bzw Rechtseitige Grenzwert) Gilt für jede von links her gegen x_0 strebende Folge x_n

$$\lim_{x_n < x_0} f(x_n) = L^-,$$

so heisst L^- der <u>linkseitige Grenzwert</u> von $f(x)$ für $x \to x_0$

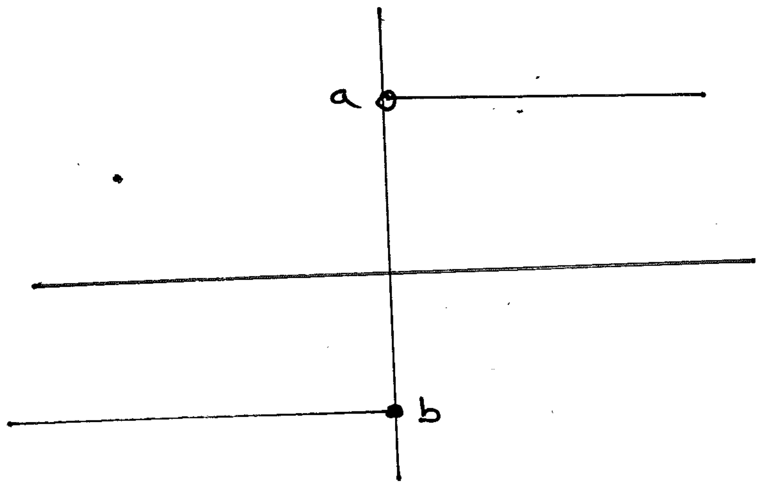
Wir schreiben $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$ oder $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L^-$

Entsprechend ist der <u>rechtseitige Grenzwert</u>: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$.
von $f(x)$, $x \to x_0$ erklärt.

Bmk: Besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den Grenzwert L, so gilt

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

(dh $L^- = L^+ = L$).



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a = L^+$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = b = L^-$$

Da $L^+ \neq L^-$, existiert der Grenzwert von f an der Stelle $x_0 = 0$ NICHT!

Grenzwerte im Unendlichen

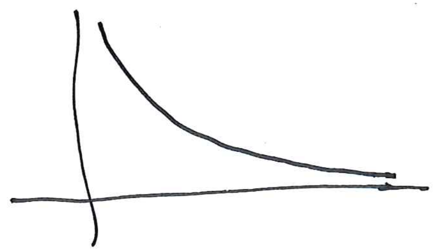
In vielen Fällen untersuchen wir auch das Verhalten einer Funktion $f(x)$ wenn die unabhängige Variable x sich immer weiter vom Ursprung in positiver (bzw, negativer) Richtung entfernt.

Defn Sei (x_n) eine Folge mit $\lim x_n = \infty$.

Besitzt eine Funktion $y = f(x)$ die Eigenschaft, dass die Folge ihrer Funktionswerte $(f(x_n))$ für jede (x_n) mit $\lim x_n = \infty$ gegen eine Zahl, L, strebt, so heisst L der Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$.

Wir schreiben $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$.

Bsp. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.



Uneigentliche Grenzwerte

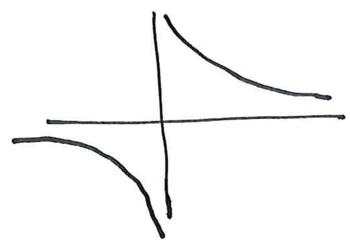
Sei f eine Funktion, $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Wenn der Funktionswert $f(x)$ für $x \to x_0$ über alle Schranken hinaus wächst, so existiert der Grenzwert im eigentlichen Sinn nicht

aber man sagt:

Defn Für $x \to x_0$ hat f uneigentlichen Grenzwert ∞ ~~...~~ falls für jede gegen x_0 konvergierende Folge (x_n) mit $(x_n) \neq x_0$, $\lim x_n = x_0$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Ist dies der Fall, so schreiben wir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$



Bsp. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty.$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen

Satz Sei L und M Zahlen und ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = M$$

so gilt

1) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = L \pm M = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

2) $\lim f(x) g(x) = LM$, $\lim f(x)/g(x) = L/M$ (wobei $M \neq 0$)

3) $\lim \lambda f(x) = \lambda L$

4) Für vektorwertige Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \to (f_1(x), \dots, f_n(x))$

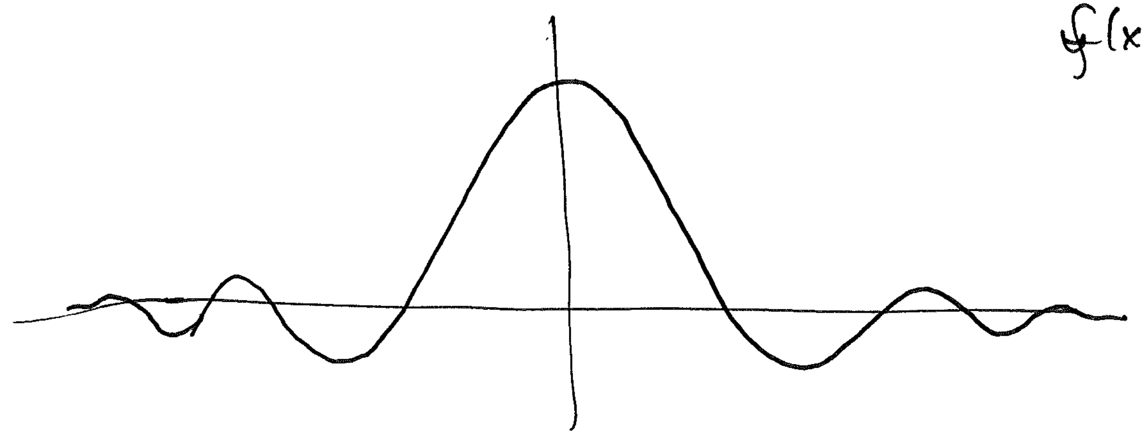
$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x), \dots f_n(x) \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f_1(x), \lim_{x \to x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

5) Falls $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ und

$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim g(x) = L$. Dann gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Bsp.

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$



$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, da $\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\downarrow \, 0} < \frac{\sin x}{x} < \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow \, 0}$ $x \to \infty$

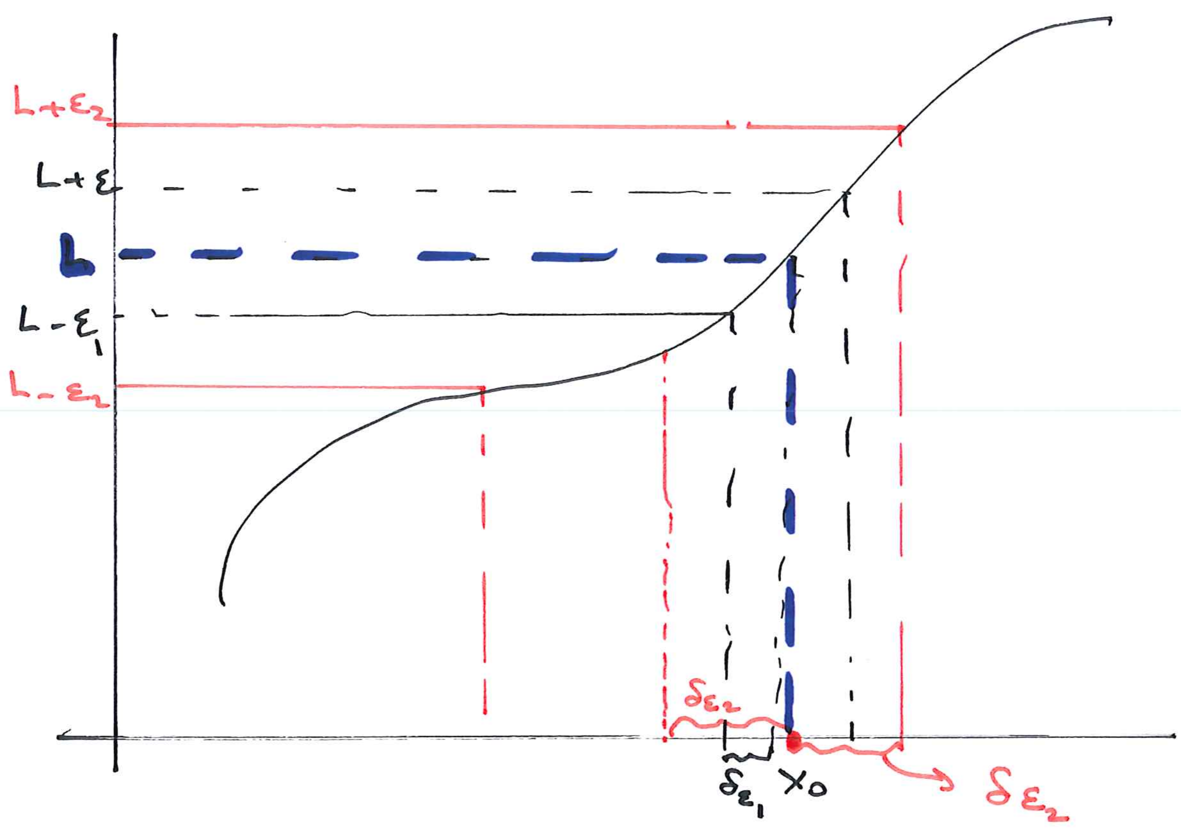
ε-δ Definition der Grenzwert

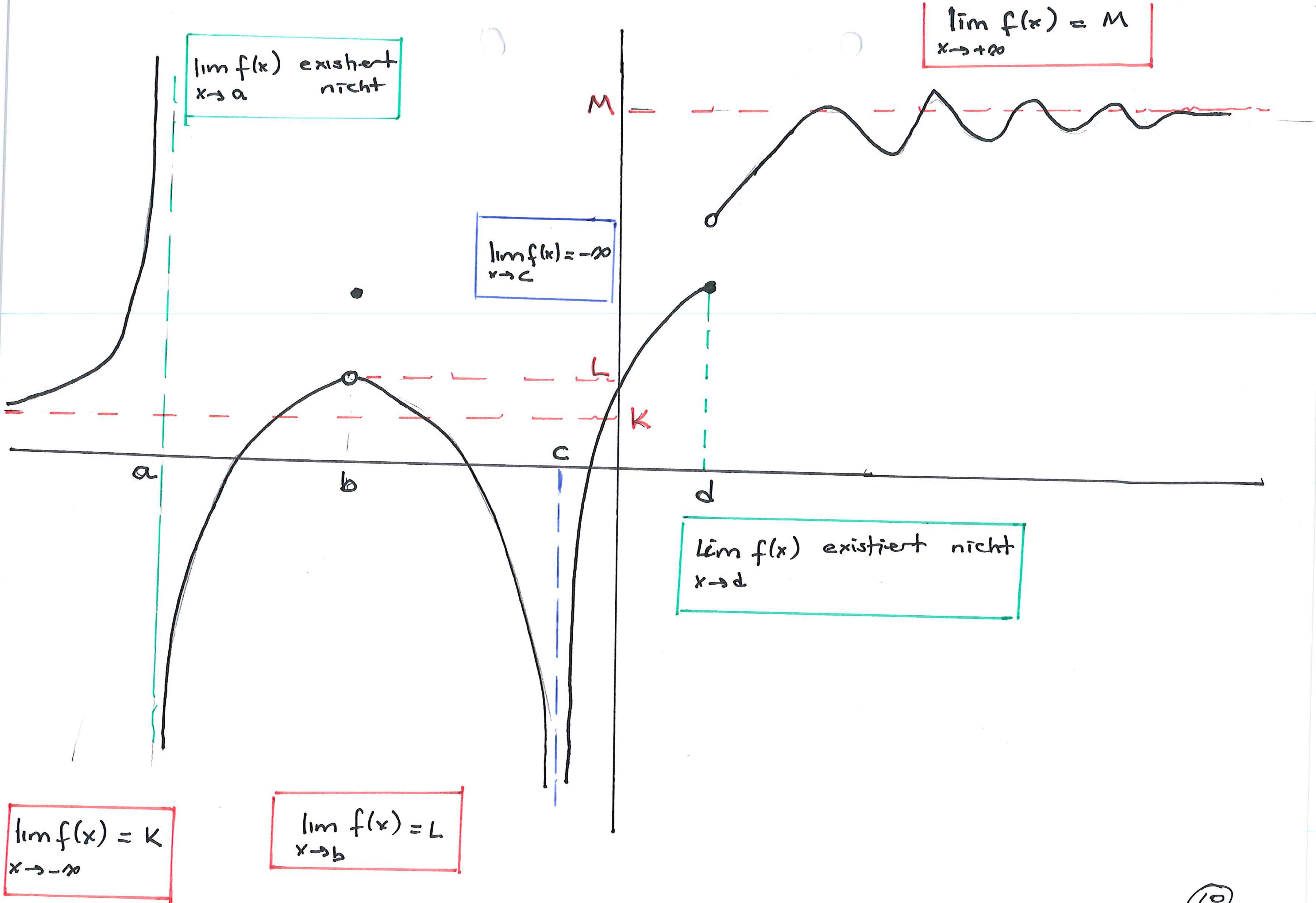
<u>Satz</u>: Sei $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Funktion $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Es sind äquivalent

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (d.h $\forall (x_n) \subset \Omega$, $x_n \neq x_0$, $\lim x_n = x_0$; $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$)

2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x_0 \neq \cancel{x} \in \Omega$: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$.

<u>Bmk</u>: Anschaulich aber etwas unpräzise, lässt sich der Grenzwert L einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 wie folgt deuten:
Der Funktionswert unterscheidet sich beliebig wenig vom Grenzwert L, wenn man sich der Stelle x_0 nur genügend nähert.


$L+\varepsilon_2$
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon_1$
$L-\varepsilon_2$
δ_{ε_2}
δ_{ε_1}
x_0
δ_{ε_2}


$\lim_{x \to a} f(x)$ existiert nicht
$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = M$
M
L
K
a
b
c
d
$\lim_{x \to d} f(x)$ existiert nicht
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = K$
$\lim_{x \to b} f(x) = L$

Stetigkeit

Defn 4.3.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$

1) f heisst stetig an der Stelle x_0 falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. $\forall\ (x_n)$ mit $\lim x_n = x_0$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

d.h. * $\boxed{\lim f(x_n) = f(\lim x_n)}$, $\forall\ (x_n) \to x_0$.

2) f heisst an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ stetig ergänzbar falls $\lim_{x\to x_0} f(x) =: a$ existiert.

In diesem Fall ist die durch $f(x_0) := a$ ergänzte Funktion f stetig an der Stelle x_0

3) f heisst stetig auf Ω, falls f in jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ stetig ist.

<u>Bmk</u> $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ist stetig an der Stelle $x_0 \in \Omega$ heisst dass ① f an der Stelle x_0 definiert ist

② $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert

③ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>Bsp.</u> ① $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \to a+b$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig.

<u>Beweis:</u> Sei $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sei $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

Dann $\lim f(a_n, b_n) = \lim a_n + b_n = \lim a_n + \lim b_n = a + b$

$= f(a, b)$

$= f(\lim a_n, \lim b_n)$.

$\square$

(2) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \to ab$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig

(3) $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(a, b) \to a/b$ " " , $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ stetig.

(4) Aus wiederholte Anwendungen von (1), (2), (3) gilt: sei $n \geq 0$ $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, Dann ist das Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$ stetig auf $\mathbb{R}$.

(5) Sei $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$.

Die Funktion f hat ein "Definitionslücke" bei $2 = x$

Wegen $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, kann man jedoch für $x \neq 2$ den Faktor $(x-2)$ kürzen. Für eine Folge $(x_n) \to 2$ $(x_n \neq 2)$

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 4}{x_n - 2} = x_n + 2 \to 4$$ d.h $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ existiert

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$ ist stetig $\forall x \in \mathbb{R}$.

(6) Sei $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Die charakteristische Funktion von rationalen Zahlen

Dann ist $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ an keiner Stelle x_0 stetig.

Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{N}$. Sei x_k die an der $k$ten Nachkomma abgebrochene Dezimal Darstellung von x_0. (z.B $x_0 = \pi$, $x_1 = 3$, $x_2 = 3.1$, $x_3 = 3.14$, ...)

Dann gilt $x_k \in \mathbb{Q}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, und $x_k \to x_0$

~~Aber~~ $\chi_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1$ da $x_k \in \mathbb{Q}$ und damit $\lim \chi_{\mathbb{Q}}(x_k) = 1$.

Aber $\chi_{\mathbb{Q}}(x_0) = 0$ da $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Damit $\lim \chi_{\mathbb{Q}}(x_k) \neq \chi_{\mathbb{Q}}(\lim x_k)$.

$\Rightarrow \chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht stetig für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$