- **Grenzwert einer Funktion** $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall (x_n)_{n \geq 1} \subset \Omega \text{ mit } \lim x_n = x_0, \; x_n \neq x_0 : \; \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

L heisst der **Grenzwert** von f an der Stelle x_0

- **ε-δ Definition der Grenzwert**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in \Omega, (x \neq x_0) : \; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

Grenzwerte im Unendlichen

$f: \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω noch oben unbeschränkt, so hat $f(x)$ für $x \to \infty$ den Grenzwert $L \in \mathbb{R}^n$ falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0 : \forall x \in \Omega ; x > C \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Uneigentliche Grenzwerte

Für $x \to x_0$ hat f den uneigentlichen Grenzwert ∞ falls gilt

$$\forall N > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, (x \neq x_0) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > N$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Grenzwerte im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \iff \forall (x_n)_{n \geq 1} \subset \Omega \text{ mit } \lim x_n = \infty : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

Uneigentliche Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \forall (x_n)_{n \geq 1} \subset \Omega \text{ mit } \lim x_n = x_0 : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty .$$

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \iff \forall c > 0 , \exists N_c \in \mathbb{N} : n > N_c : |a_n| > c \right)$$

Stetigkeit

- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $x_0 \in \Omega$

  f ist an der Stelle x_0 stetig

  $$\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

  f ist an der Stelle x_0 stetig

  $$\Longleftrightarrow \forall (x_n) \text{ mit } \lim x_n = x_0 : \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)}$$

- f heisst an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ stetig ergänzbar falls $\lim_{x \to x_0} f(x) := a$ existiert.

  Dann ist die durch $f(x_0) := a$ ergänzte Funktion f stetig an der Stelle x_0.

f stetig in x_0 $\Longrightarrow$ (1) $f(x_0)$ ist definiert

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>Bsp</u>: (1) Alle polynomen $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

sind stetig auf $\mathbb{R}$.

(2) $\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (characteristische Funktion der Rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.)

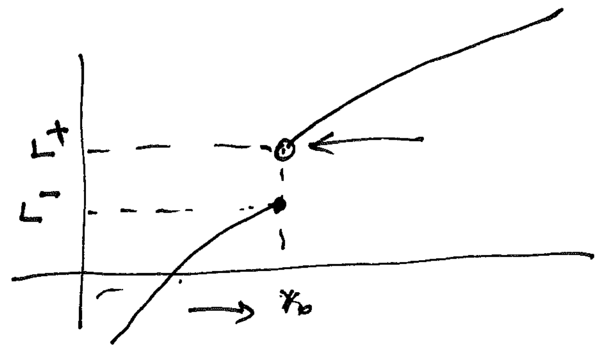
ist an <u>keiner</u> stelle stetig

__Bsp.__ 4.1.3 (vii). Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone wachsend

Sei nun $x_0 \in (a, b)$. Dann existieren für jedes $x_0 \in (a, b)$ die links und rechsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) := L^+ \quad , \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) := L^-$$

und f ist stetig an der Stelle x_0 genau dann, wenn $L^+ = L^- = f(x_0)$.



Aber $L^+ \neq L^-$.

f ist an der Stelle x_0 nicht stetig.

Beweis: Übung.

Satz: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ monotone wachsende Funktion. Dann ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von f abzählbar.

Eigenschaften der stetige Funktionen.

① Stetigkeit verhält sich gut mit den üblichen Operationen auf Funktionen.

Satz 4.2-1. Sind $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ stetig.

So ist auch deren Komposition $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in \Omega$, $(x_n) \subset \Omega$ mit $\lim x_n = x_0$

Da f stetig ist, $\lim f(x_n) = f(x_0) = f(\lim x_n)$.

Aus Stetigkeit von g folgt

$$\overbrace{\lim_{n\to\infty} g(f(x_n))}^{\lim_{n\to\infty} (g\circ f)(x_n)} \underset{\substack{\downarrow \\ g \text{ stetig.}}}{=} g(\lim f(x_n)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0).$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ ist stetig an der Stelle x_0,

Satz 4.2.2. Seien $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$.

Falls f, g in x_0 stetig sind, so sind es auch αf und $f+g$.

d.h. Die stetigen funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ bilden ein $\mathbb{R}$. Vektorraum.

Notation : $C^0(\Omega : \mathbb{R}^n) := \{ f: \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ ist stetig} \}$,

Continuos.

Satz 4.2.3: Seien $-\infty < a \leq b < \infty$

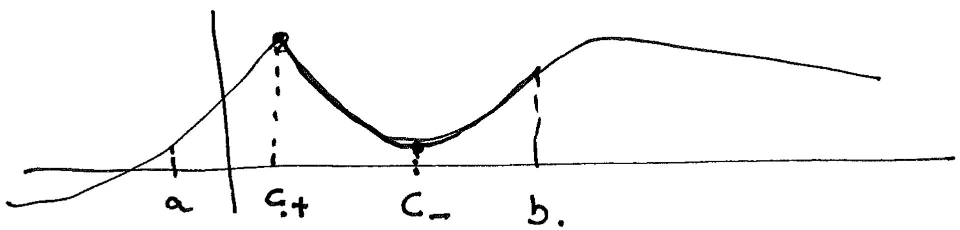
und $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

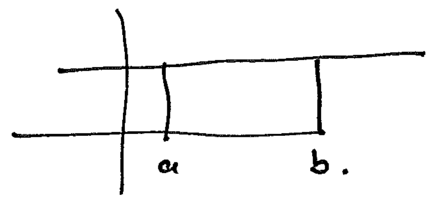
Dann ist $f([a,b])$ in $\mathbb{R}$ beschränkt,

und es gilt $c_-, c_+ \in [a,b]$ mit

$$f(c_+) = \sup \{f(x) : x \in [a,b]\} \quad \text{und}$$
$$f(c_-) = \inf \{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

d.h Sup. und Inf werden angenommen.





Beweis ① Behauptg.: $f([a,b])$ ist beschränkt.

Beweis: Falls nicht, so gibt $\forall n \in \mathbb{N}$ ein

$t_n \in [a,b]$ mit $f(t_n) > n$

$(t_n) \subset [a,b]$ ist beschränkt.

Noch Bolzano-Weierstrass, sei $(t_{\ell(n)})$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim t_{\ell(n)} = x_0$

Dann, da $a \leq t_{\ell(n)} \leq b$, $x_0 \in [a,b]$.

Aus Stetigkeit von f folgt

$$\lim f(t_{\ell(n)}) = f(\lim t_{\ell(n)}) = f(x_0).$$

d.h. die Folge $f(t_{\ell(n)})$ konvergiert, mit Grenzwert $f(x_0)$.

Insbesondere $f(t_{\ell(n)})$ ist beschränkt.

Aber dies ist ein Wiederspruch zu $f(t_{\ell(n)}) \geq \ell(n)$

$(f(t_n) \geq n)$. ↯.

Da $f([a,b])$ beschränkt ist,

$\sup \{f(x) : x \in [a,b]\}$ existiert.

Sei $M := \sup \{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Für jedes $n \geq 1$, sei $x_n \in [a,b]$ mit

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

$M - \frac{1}{n}$ kein supremum

M ist sup.

Die Folge $(x_n) \subset [a,b]$ ist beschränkt.

Sei (Nach Bolzano-Weierstrass) $(x_{\ell(n)})$ eine konv. Teilfolge mit limes $c_+ \in [a,b]$, $\lim x_{\ell(n)} = c_+$

Aus Stetigkeit von f folgt

$$\lim f(x_{\ell(n)}) \underset{\text{Stetigkeit}}{=} f(\lim x_{\ell(n)}) = f(c_+)$$

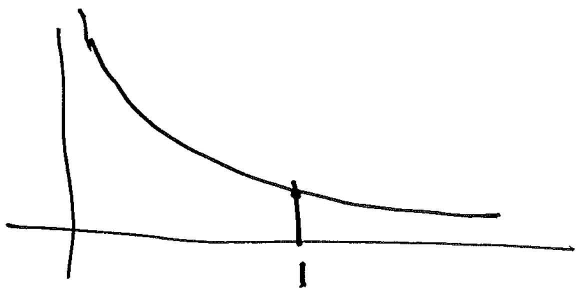
$$\begin{array}{ccccc} M - \frac{1}{\ell(n)} & < & f(x_{\ell(n)}) & \leq & M \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ M & & & & M \end{array} \quad \overset{\text{Sandwichsatz}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_{\ell(n)}) = M$$

$$\Downarrow$$

$$M = f(c_+)$$

$\blacksquare$.

Bmk Die Obere Satz kann man als eine Eigenschaft des Intervals $[a,b]$ auffassen. Sie gilt z.B nicht für $(0,1]$ wie der Bsp. auf $(0,1]$ stetigen Funktion $\frac{1}{x}$ zeigt.



Die Grundliegende Eigenschaft ist <u>Kompaktheit</u>.

<u>Defn 4.2.2.</u> Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^d$ heisst kompakt falls jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Punkten aus K, einen Häufungspunkt <u>in</u> K besitzt.

d.h. jede Folge in K hat eine <u>in</u> K konvergierende Teilfolge.

<u>Bsp.</u> 1. $(0,1]$ ist nicht kompakt.

$\left(\frac{1}{n}\right) \subset (0,1]$ konvergiert gegen $0 \notin (0,1]$.

2. $[a,b]$ ist kompakt.

<u>Beweis</u>: Sei $a \leq x_n \leq b$ eine Folge in $[a,b]$.

(x_n) ist beschränkt $\overset{BW.}{\Longrightarrow}$ sei $x_{\ell(n)}$ eine konv. Teilfolge mit Grenzwert $\cancel{L}$.

Dann folgt aus $a \leq x_{\ell(n)} \leq b$ ~~folgt~~, dass

$$a \leq \lim x_{\ell(n)} \leq b, \text{ d.h. } L \in [a,b].$$

$\Longrightarrow [a,b]$ ist kompakt.

Für kompakte Teilfolge in $\mathbb{R}^n$, gilt die folgende

<u>Lemma 4.2.1</u> Sei K kompakt, $K \subset \mathbb{R}^n$

Dann ist K beschränkt und es gibt $a, b \in K$ mit $a = \operatorname{Inf} K = \min K$ und $b = \sup K = \max K$.

Die Verallgemeinerung der ~~Satz~~ $\widetilde{4.2.3}$ ist

<u>Satz 4.2.3</u> Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt. Insbesondere nehmen stetige Funktionen ihr Supremum und Infimum an.

d.h Es gibt $c_+, c_- \in K$ mit

$$f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) \quad \forall x \in K.$$

§ 4.3 Ein wenig Topologie → Eine gute Zusammenfassung der Top. Begriffe siehe Pink .. in $\mathbb{R}^n$.

§ 4.4 Norm auf $\mathbb{R}^d$

Hier führen wir einige Notation ein.

$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$. offene Kugel

$\overline{B_r(x_0)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$. geschlossene.

§ 4.4. Der Distanzbegriff auf $\mathbb{R}^d$ kommt von einem Skalarprodukt.

Es gibt interessante, andere Arten einen Distanzbegriff einzuführen, nämlich via dem Begriff der Norm

Defn. Eine Norm in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung.

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit folgende Eigenschaften

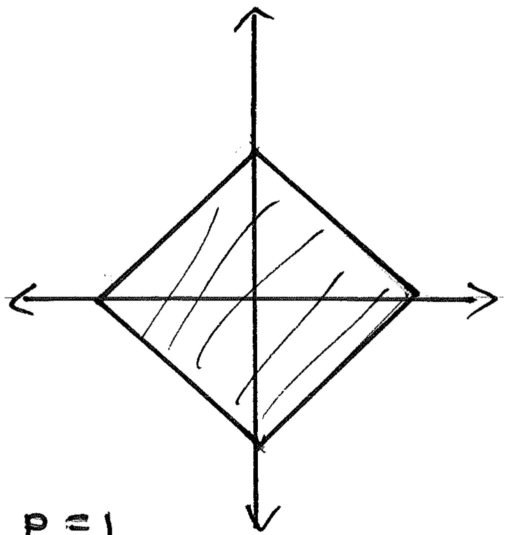
1) $\|x\| \geq 0$, mit Gleichheit genau dann wenn $x=0$.
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d$.

Bsp. ① $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\right)^{1/2}$. kommt aus Skalar Produkt $\langle x,y \rangle := \sum x_i y_i$

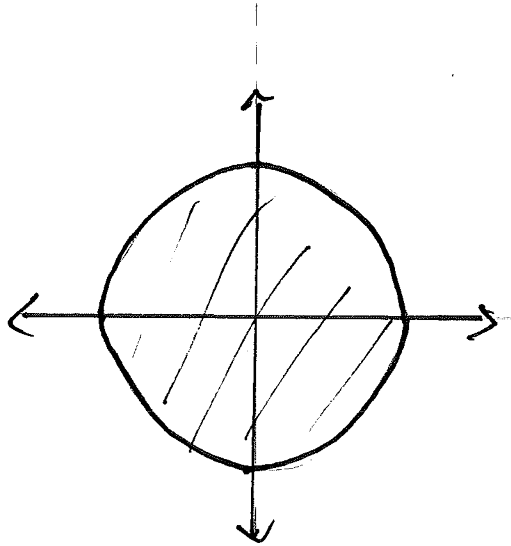
2. $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{1/p}$ $1 \le p < \infty$ ist auch ein Norm auf $\mathbb{R}^d$.

3. $\|x\|_\infty := \max_i \|x_i\|$

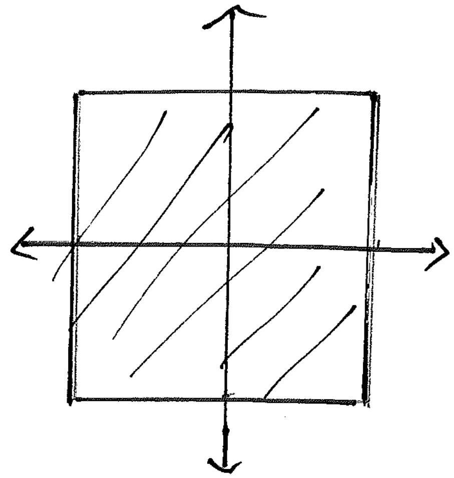
$\underline{d=2}$



$p=1$



$p=2$



$p=\infty$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{2} |x_i| \leq 1$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1$

$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1$

$$\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - 0\| \leq 1\}.$$

§4.5 Topologische Kriterium für Stetigkeit

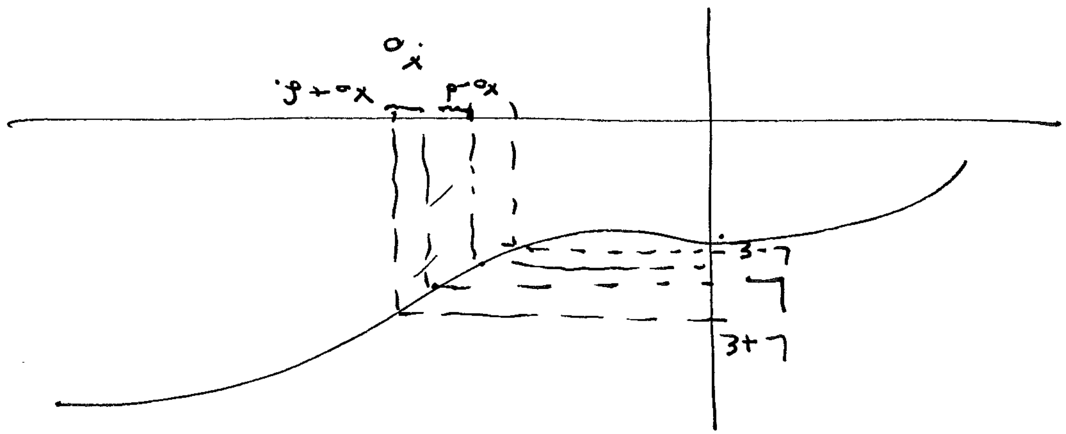
Satz 4.5.1 Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Funktion. $x_0 \in \Omega$. Folgende sind äquivalent.

1) f ist stetig an der Stelle.

$\left(\forall (x_n) \subset \Omega, \text{ mit } \lim x_n = x_0 \ (x_n \neq x_0) : \lim f(x_n) = f(\lim (x_n)) = f(x_0) \right)$

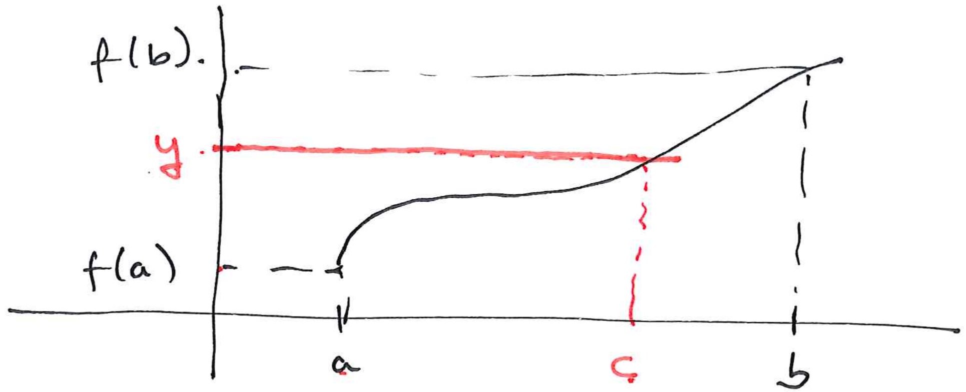
2) Für jedes $\varepsilon > 0$, gibt es $\delta > 0$ so dass $\forall x \in \Omega$, mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

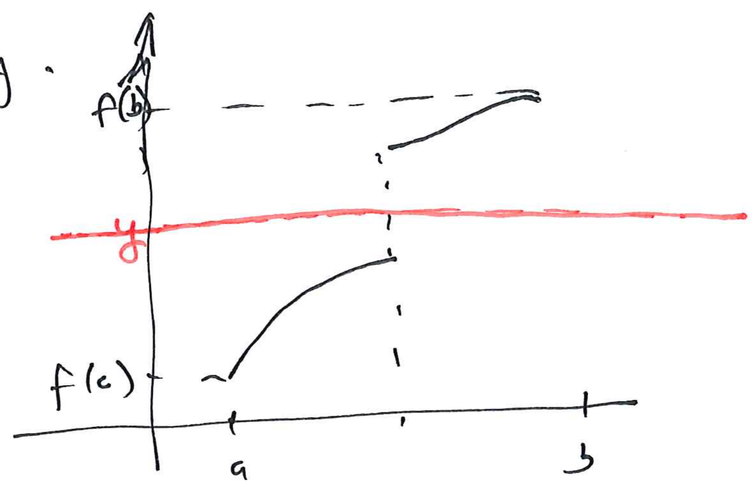
Bmk: Wenn man die δ-Umgebung von die x_0 klein genug wählt, kann man in eine kleine ε-Umgebung alle Funktionenwerte einschliessen kann.



§ 4.6 Zwischenwertsatz und Folgerungen.

Satz 4.6.1 (Zwischenwertsatz). Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ eine $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$.





Idee:

Beweis. Wir benutzen ein Bisektions verfahren.

Wir definieren zwei monotone Folgen

$$a = a_1 < a_2 \cdots \quad < a_n \le b_n \cdots < \quad b_2 < b_1 = b.$$

mit $\lim a_n = \lim b_n = c$ und

$$f(a_n) \le y < f(b_n)$$

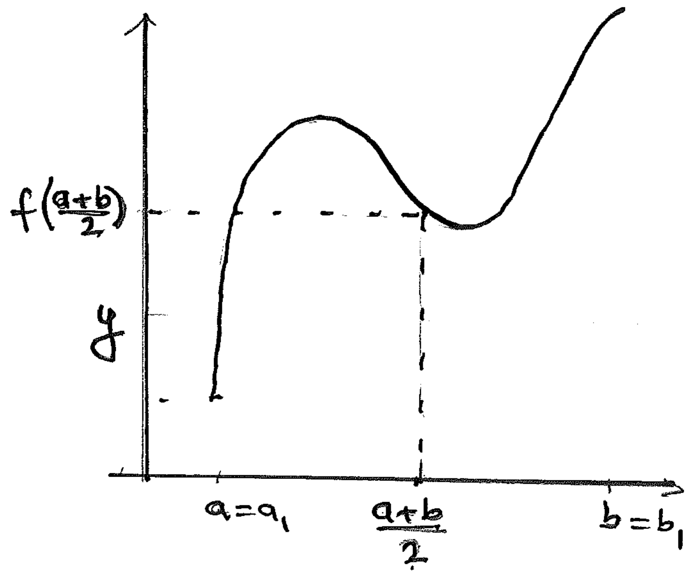
Aus stetigkeit von f folgt

$$\cancel{\lim f(a_n) = f(\lim a_n)} <$$

$$\cancel{= f(c)}$$

$$f(c) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) < y < \lim f(b_n) = f(\lim b_n) = f(c.)$$

$$\Rightarrow y = f(c)$$

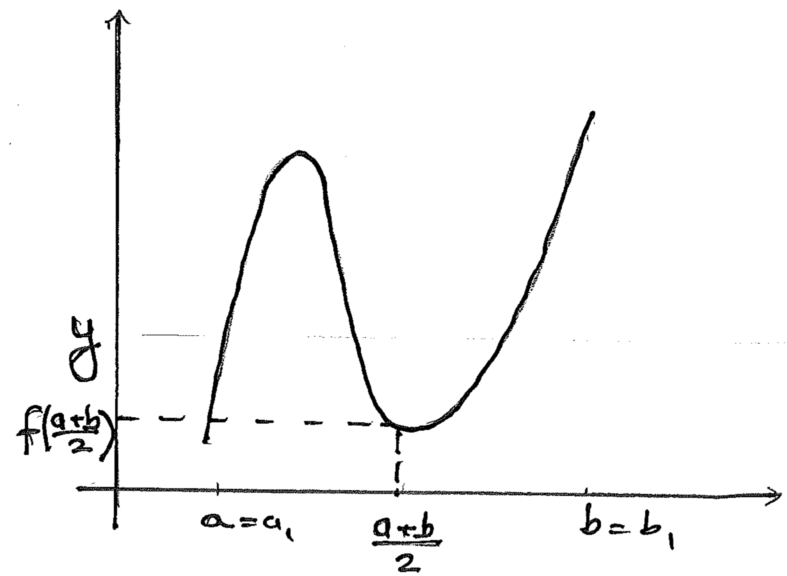


$a_1 = a \quad , \quad b_1 = b$

Falls $\quad f(\frac{a+b}{2}) \geq y$

setzen wir $\quad a_2 = a_1 = a$

$b_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$



$a_1 = a \quad , \quad b_1 = b$

Falls $\quad f(\frac{a+b}{2}) < y$

Setzen wir $\quad a_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{a_1+b_1}{2}$

$b_2 = b_1$

$$\boxed{\begin{gathered} a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1 \\ b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} \\ f(a_2) < y \leq f(b_2) \end{gathered}}$$

Wir iterien jetzt dieses Verfahren.
Wir nehmen an, dass wir Folgen definert haben nach $(k-1)$ schritten mit

1. $a = a_1 \le a_2 \cdots\ a_k < b_k \le b_{k-1} \cdots b_1 = b.$

2. $b_k - a_k = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$

3. $f(a_k) \le y \le f(b_k)$

$\vdots$

Nach Induktion. erhalten wir $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$
2 Folgen mit Eigenschaften 1, 2, 3.

$(a_n), (b_n)$ sind mon. und beschränk

$\underset{\text{mon.-konv satz}}{\Longrightarrow}$ gibt es $A = \lim a_k$, $B = \lim b_k$.

Wegen (1) $a_k - b_k = \frac{a_1 - b_1}{2^{k-1}}$ $\lim (a_k - b_k) = 0$

$\Rightarrow \lim a_k = \lim b_k$

Sei $c \in [a, b]$ dieser wert $\lim a_k = \lim b_k = c$.

Aus stetigkeit von f folgt

$f(c) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$

Aus (3) folgt $f(a_n) \leq y \Rightarrow f(c) = \lim f(a_n) \leq y$

$y \leq f(b_n) \Rightarrow y \leq f(c)$ $\Big\}$ $y = f(c)$