Eigenschaften der stetige Funktionen

- Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, an der stelle $x_0 \in \Omega$

  Dann gilt ① $f+g$ ist stetig in x_0.

  ② αf ist stetig in x_0, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

- Sei $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ stetig,

  So ist auch $g \circ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^l$ stetig.

- Seien $-\infty < a \leq b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig

  Dann ist $f([a, b])$ in $\mathbb{R}$ beschränkt und es gilt

  c_- und $c_+ \in [a, b]$ mit $f(c_+) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$

  und $f(c_-) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

- Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt

  $f : K \to \mathbb{R}^d$ stetig. Dann ist $f(K)$ Kompakt, und nimmt f ihr Supremum und Infimum an.

ε-δ Definition der Stetigkeit

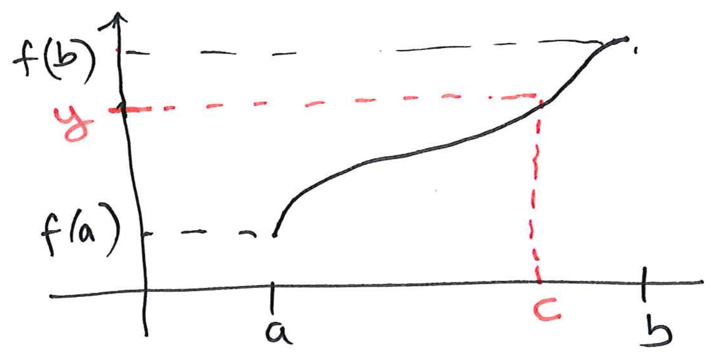
- f ist stetig an der Stelle x_0 $\left(\forall (x_n) \text{ mit } \lim x_n = x_0;\ \lim f(x_n) = f(x_0)\right)$

$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ so dass $\forall x \neq x_0$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- Zwischenwertsatz Seien $-\infty < a < b < \infty$ und

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, mit $f(a) \leq f(b)$. Dann

$\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in [a, b]$: $f(c) = y$.

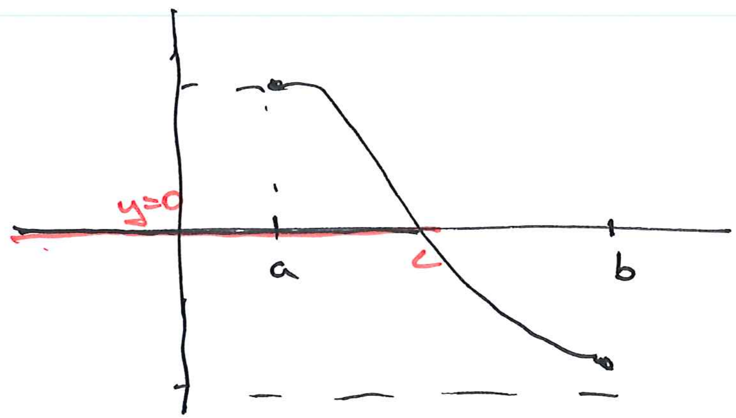


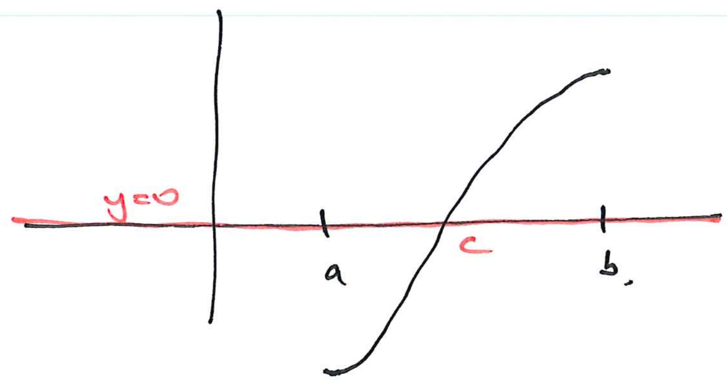
so dass $f(c) = y$.

Zwischenwertsatz hat viele Folgerungen.

(1) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,

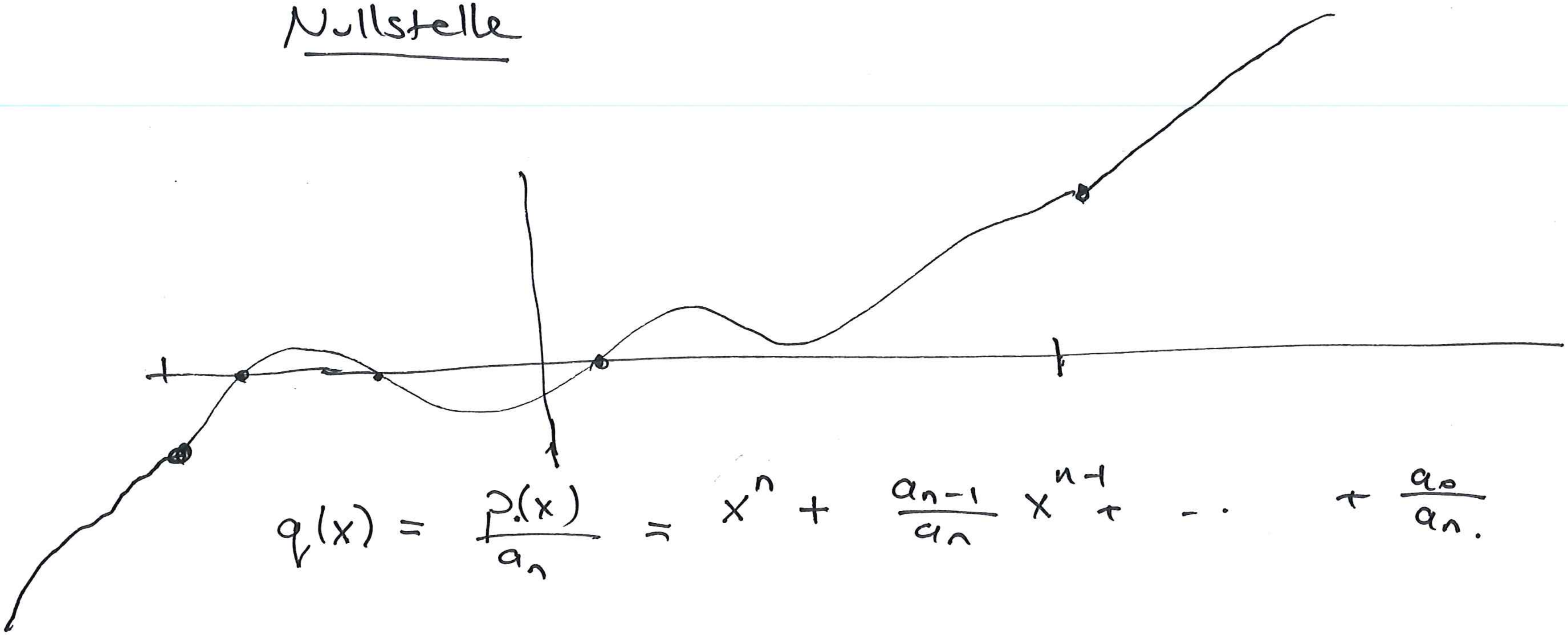
$f(a)f(b) < 0 \implies \exists\, c \in [a, b]$ s.d. $f(c) = 0$.





(2) Sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ eine Poly. mit reelle Koeffizienten so dass $a_n \neq 0$ und n ungerade.

Dann besitzt $p(x)$ mindestens eine reelle Nullstelle



$$q(x) = \frac{p(x)}{a_n} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}.$$

3 Jede 3x3 Matrix A mit koeffizienten in $\mathbb{R}$ hat mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$

charakteristische Poly p von A

$= \det(A - \lambda I)$

~~Pa~~ ↑ polynom vom Grad 3 (A ist 3×3 Matrix).

Die nächste Folgerung geht um die Umkehrfunktion.

Satz 4.6.2. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, streng monotone wachsend ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)

Setze $f(a) := c$, $f(b) := d$.

Dann ist
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bild} f &:= \{ f(x) : x \in [a,b] \} \\
&:= f([a,b]) \\
&= [c,d] = [f(a), f(b)].
\end{aligned}
$$

$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ ist bijektive.

und die Umkehr funktion $f^{-1} : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ ist stetig.

(6).

Beweis: f streng mon. wachsend.

d.h. Falls $x \neq y$ dann ist $f(x) \neq f(y)$

$\Rightarrow$ f ist injektive.

Um surjektivität zu sehen. Sei $y \in [c, d] = [f(a), f(b)]$

Nach ZWS $\exists$ $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

$\Rightarrow$ f ist surjektivität

$\Rightarrow$ f ist bijektive $\Rightarrow$ Man kann ein Umkehr funktion definieren $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$.

Behauptung: f^{-1} ist stetig.

Satz 4.6.3. Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monotone wachsend mit Limites

$$-\infty \leq c := \lim_{x \to a^+} f(x) < \lim_{x \to b^-} f(x) =: d \leq \infty .$$

Dann ist $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ bijektive und f^{-1} ist stetig.

Als Folgerungen, studieren wir die Umkehr Funktionen von

$$f(x) : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$
$$x \longrightarrow x^n$$

$$\mathrm{Exp}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Bsp 4.6.2 (i). Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Sie ist auf $(0,\infty)$ streng monotone wachsend mit Bild $(0,\infty)$.

Die Umkehrfunktion $\sqrt[n]{\cdot} : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$
$$x \longrightarrow \sqrt[n]{x}$$
ist stetig.

Beweis: $y^n - x^n = (y-x)\underbrace{(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}_{>0}$.

Für $0 < x,\ y < \infty$

Aus folgt $\begin{matrix} (y-x) > 0 \\ y > x \end{matrix} \implies \begin{matrix} y^n - x^n > 0 \\ y^n > x^n. \end{matrix}$

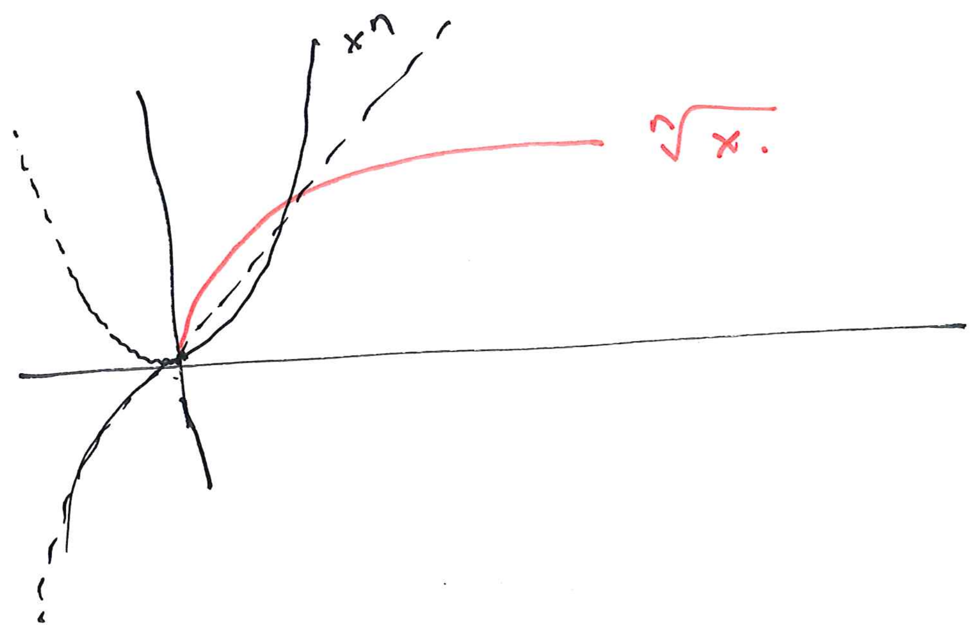
$y > x \implies f(y) > f(x) \equiv$ streng. mon. wachsend.

wir haben schon gesehen dass alle Poly. stetig auf $\mathbb{R}$ sind.

Mittels Satz 4.6.3, Die umkehr funktion ist

$$(0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$
$$y \longrightarrow \sqrt[n]{y}$$

stetig.



__Bsp 4.6.2.__ (ii) Die Funktion

$\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist __stetig__, __streng monotone wachsend__ mit

$$\mathrm{Bild}(\mathrm{Exp}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{R}) = (0, \infty).$$

Die Umkehrfunktion von Exp wird mit Log bezeichnet

$$\mathrm{Log} : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Log ist auch stetig.

<u>Beweis</u>. $\mathrm{Exp}(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

ist abs konv auf ganz $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Falls } x \geq 0, \text{ ist } \mathrm{Exp}(x) \geq 1 > 0 \\ \text{Wegen } \mathrm{Exp}(-x) = \frac{1}{\mathrm{Exp}(x)} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\mathrm{Exp}(x) > 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathrm{Bild}(\mathrm{Exp}) = \mathrm{Exp}(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$$

$$\mathrm{Exp}(y) - \mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}(x)\left[\underbrace{\mathrm{Exp}(y-x) - 1}\right].$$

Falls $y > x$ (d.h $y - x > 0$), so ist $\mathrm{Exp}(y-x) > 1$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Exp}(y-x) - 1 > 0}_{\text{falls } y > x}, \quad \underbrace{\mathrm{Exp}(x) > 0}_{\forall x \in \mathbb{R}}$$

Folg $y > x$, ist $\mathrm{Exp}(y) - \mathrm{Exp}(x) > 0$

d.h $y > x \Longrightarrow \mathrm{Exp}(y) > \mathrm{Exp}(x)$

d.h Exp. ist streng mon. wachsend.

<u>Behauptung</u>: Exp ist stetig auf $\mathbb{R}$.

<u>d.h</u> wir müssen zeigen das $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{Exp}(x) = \mathrm{Exp}(x_0)$.

Sei $x = x_0 + h$ $\quad 0 < h < 1$

$$\mathrm{Exp}(x) - \mathrm{Exp}(x_0) = \mathrm{Exp}(x_0)\,[\mathrm{Exp}(x - x_0) - 1].$$
$$\mathrm{Exp}(x_0)\,[\mathrm{Exp}(h) - 1]$$

$$|\mathrm{Exp}\,h - 1| = \left|\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |h^k|$$
$$= \frac{|h|}{1 - |h|}$$

Also $\operatorname{Exp}(x) - \operatorname{Exp}(x_0) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Also für $x = x_0 + h \to x_0$, $\lim_{x \to x_0} \operatorname{Exp}(x) = \operatorname{Exp}(x_0)$.

$\Rightarrow$ Exp ist stetig.

$\Rightarrow$ $\operatorname{Exp} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng mon. wachsend und stetig.

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion ist auch stetig.
Satz 4.6.3.

<u>Bmk</u>: $\operatorname{Log} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. hat folgende Eigenschaften.

1. $\mathrm{Log}(1) = 0 \qquad (\mathrm{Exp}\, 0 = 1)$

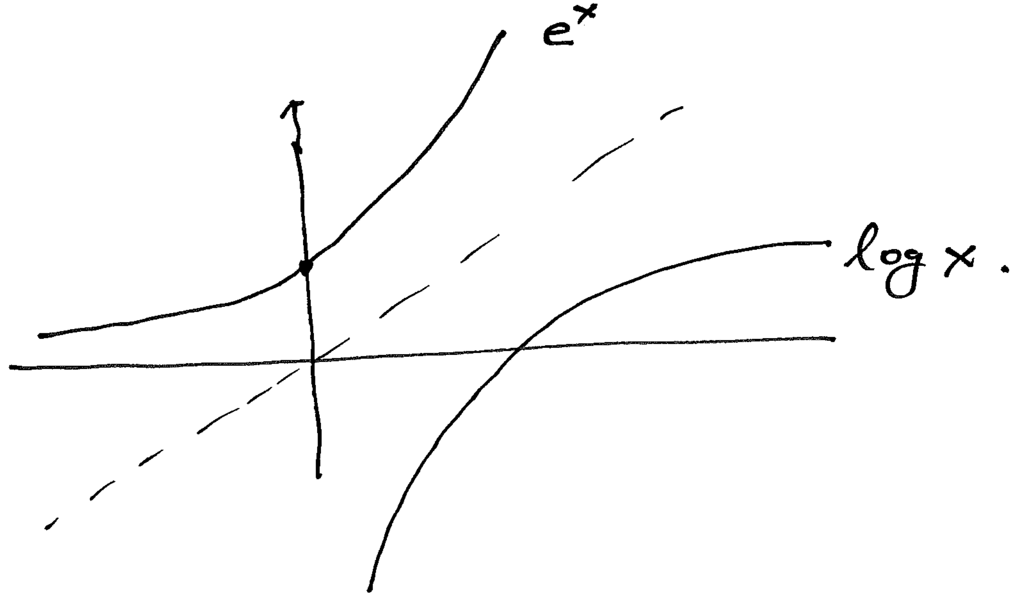
2. $\mathrm{Log}(xy) = \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y \qquad \forall x,y > 0$.

<u>Beweis</u>: $\quad \mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\, x) = x$

$$\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y) = \mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\, x) \cdot \mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\, y) = x y.$$

$\Longrightarrow \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y = \mathrm{Log}\, xy$.

3. ~~Se~~ Sie ist strikt mon. wachsend.



<u>Beweis:</u> $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist stetig:

Sei $y_0 \in [c, d]$, sei $y_n \in [c, d]$ eine Folge mit $\lim y_n = y_0$.

<u>z.z.:</u> $\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(\lim y_n) = f^{-1}(y_0)$.

Da f bijektive ist, $\exists\ x_n = f^{-1}(y_n) \in [a, b]$.
und $x_0 \in [a,b]$ mit $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Da $(x_n) \in [a, b]$, ist (x_n) beschränkt.

$\underset{BW.}{\Longrightarrow}$ Sei $x_{\ell(n)} = f^{-1}(y_{\ell(n)})$ eine konv. Teilfolge von x_n.
Sei x deren Grenzwert $\lim f^{-1}(y_{\ell(n)}) := x$

f ist stetig $\Longrightarrow$ $f(x) = f\left(\lim f^{-1}(y_{\ell(n)})\right)$

$\overset{f}{\underset{\text{stetig}}{=}} \lim \left(f f^{-1} (y_{\ell(n)}) \right).$

$= \lim y_{\ell(n)}.$

Aber (y_n) ist konv. $\Longrightarrow y_0 = \lim y_n = \lim y_{\ell(n)} = f(x)$

$y_0 = f(x_0)$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) \underset{f \text{ bijek.}}{\Longrightarrow} x = x_0.$ Da diese für jede Teilfolge von (x_n) gilt,

~~das~~ $\lim x_n = x_0.$

Aber dann gilt $\lim x_n = \lim f^{-1}(y_n) = x_0 = f^{-1}(y_0).$

$\Rightarrow \underline{\lim f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0).}$ $\#$.

§ 4.8. Punktweise und Gleichmässige Konvergenz.

(pointwise) (uniform).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Defn. (i) Die Folge der Funktionen $(f_k)_{k \geq 1}$ **konvergiert punktweise** gegen f falls

$\forall x \in \Omega$, $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$

d.h. $\forall x \in \Omega$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_{x,\varepsilon}$ so dass

$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\ k > K_{x,\varepsilon}$.

<u>Frage:</u> . Ist f stetig, falls alle $(f_k)_{k\geq 1}$ stetig sind?

<u>Bsp.</u> Sei $f_k : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x^k$. $k \geq 1$

Dann $0 \leq x < 1$ $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = 0$

$x = 1$ $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = 1$.

Also konvergiert (f_k) punktweise gegen f

wobei $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$ f ist nicht stetig!.

Defn (ii) (f_k) **konvergiert gleichmässig** gegen f

falls

$$\sup_{x\in\Omega} \|f_k(x) - f(x)\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ so dass $\forall k > K_\varepsilon$, $\boxed{\forall x \in \Omega}$, $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$. gleichmässig konv.

$\boxed{\forall x \in \Omega}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_{\varepsilon,x}$ so dass $\forall k > K_{\varepsilon,x}$ $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. p.w.

Der Sinn dieses Konvergenzbegriffs ist

<u>Satz 4.8.1</u> Seien $f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ so dass f_k gleichmässig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

<u>Bsp.</u> Seien $(a_k) \in \mathbb{C}$ und $P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ die Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho = 1/\limsup a_k^{1/k} \leq \infty$.

Dann die Folge der Polynomen $P_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ konvergieren gleichmässig gegen $P(z)$ auf $B_r(0)$ für jedes $r < \rho$.

Insbesondere Nach Satz 4.8.1, Die Potenzreihen sind stetig innern Ihres konvergenzkreises.

<u>Beweis</u> Sei $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\} \subset B_\rho(0)$.

und $r < s < \rho$

$$|P(z) - P_n(z)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| r^k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \left|\frac{r}{s}\right|^k |s|^k. \leq \left|\frac{r}{s}\right|^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| s^k$$

$$\leq \left|\frac{r}{s}\right|^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| s^k := C_s < \infty. \quad \text{da } s < \rho.$$

$$|P(z) - P_n(z)| \leq \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} C_s$$

$|P(z) - P_n(z)| \longrightarrow 0$ als $n \to \infty$.

d.h. $P_n(z) \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} P(z)$.

$\Rightarrow P(z)$ ist stetig, da $P_n(z)$ stetig sind und $P_n \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} P$.

<u>Eine natürliche Frage ist:</u>

Was sind die einfachsten Funktionen mit denen man alle stetige Funktionen gleichmässig approximieren kann?

Ein expliziter Approximations verfahren für auf $[0,1]$ stetige Funktionen mittels Polynomen wurde von Bernstein gefunden. (~ 1911)

$$B_{i,n}(x) := \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \qquad 0 \leq i \leq n.$$

$B_{0,0} = 1$

$B_{0,1} = 1 - x \quad , \quad B_{1,1} = x \quad . \quad . \quad .$

Diese Polynomen bilden eine Basis der Vektorraums der Poly. vom Grad n.

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dann ist

$$B_n(f)(t) := \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\, f\left(\frac{i}{n}\right)$$

<u>Satz</u> (<u>Bernstein</u>) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann konvergiert die Folge $(B_n(f))_{n \geq 1}$ gleichmässig gegen f.

Dieser Satz wurden von Ingeneuren in Renault und Citroen benützt um "Bezierkurven" zu entwickeln.

Seien z.B $P_0 \ldots P_n$ n- kontrol Punkten in Ebene. Dann ist die Parametrische Kurve

$$t \to \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) P_i$$

die Bezier kurve.