Zwischenwertsatz: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq f(b)$. Dann gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ eine $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$

Folgerungen ① Existenz einer Nullstelle.

f stetig, $f(a)f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\, c \in [a, b]$ s.d. $f(c) = 0$.

② Stetigkeit der Umkehr funktion

Satz Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monotone wachsend.
Dann ist $\text{Bild} f = [c, d] = [f(a), f(b)]$, $f : [a, b] \to [c, d]$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ ist stetig.

Satz Sei $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig und streng monotone wachsend mit $-\infty \le c := \lim_{x\to a^+} f(x) < \lim_{x\to b^-} f(x) =: d \le \infty$

Dann ist $f:(a,b)\to(c,d)$ bijektive und $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ ist stetig.

Bsp

- $f(x):(0,\infty)\to(0,\infty)$, $x\to x^n$ ist stetig, streng mon. wachsend

$\Longrightarrow$ $f^{-1}:(0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$, $x\longrightarrow\sqrt[n]{x}$ ist stetig.

- $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to \operatorname{Exp}(x)$ Ist streng monot. wachsend, stetig mit $\operatorname{Bild}(f)=(0,\infty)$.

Die Umkehrfunkt $f^{-1}:(0;\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longrightarrow \operatorname{Log} x$ Ist stetig.

- $\operatorname{Log}(1)=0$, • $\operatorname{Log}(xy)=\operatorname{Log}x+\operatorname{Log}y$

Sei $(f_k)_{k\geq 1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Funktionen.

Defn: 1) Die Folge (f_k) konvergiert punktweise gegen f, falls gilt $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x)$, $\forall x \in \Omega$.

2) Die Folge (f_k) konvergiert gleichmässig gegen f falls gilt $\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Satz Seien (f_k) stetig, weiter gelte $f_k \to f$ gleichmässig, für ein $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dann ist f stetig.

Bsp sei $P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, ρ = Konvergenzradius der $p(x)$.

Dann $P_n(x)$ konvergiert gleichmässig gegen $p(x)$ auf $B_r(0) := \{x \mid |x| < r\}$ für jedes $r < \rho$.

Insbesondere $p(x)$ ist stetig auf $B_r(0)$ für aller $r < \rho$.

§4.7. Gleichmässig stetigkeit

Wir werden 2 Bsp. anschauen.

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to 3x+8.$

Beh. f ist stetig $\forall x \in \mathbb{R}$

z.z. $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.d.
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$ } Defn. von stetigkeit.

$$|f(x) - f(x_0)| = |3x+8-(3x_0+8)| = |3(x-x_0)| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Für jede $\varepsilon > 0$, wählen wir $\delta = \varepsilon/3$, Dann gilt

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon/3 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\delta = \varepsilon.$$

(2). $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$

$x \to x^2$

Behap:
Dann ist f in $(0,\infty)$ stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in (0,\infty)$, $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$$

Sei $|x - x_0| < \delta < 1$. Dann

~~x~~ $x < x_0 + \delta < x_0 + 1 := a$

Dann
$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$$
$$\leq |x - x_0|(|x| + |x_0|).$$
$$\leq |x - x_0|(\underbrace{x_0 + 1 + x_0}).$$
$$\leq |x - x_0|\,2a. \overset{?}{<} \varepsilon$$

Wenn wir $\delta := \min(1, \varepsilon/2a)$, wählen

Dann $|x^2 - x_0^2| < |x - x_0| \cdot 2a < \delta \cdot 2a < \frac{\varepsilon}{2a} \cdot 2a = \varepsilon$.

$\Rightarrow$ δ hängt von ε, $a = x_0 + 1$, δ hängt von ε, x_0.

$f = \underset{}{\overset{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}{3x+8}}$.	$f = (0,\infty) \to (0,\infty)$ $x \to x^2$.
δ hängt nur von ε ab (und nicht von x_0 ab).	δ hängt von ε <u>und</u> x_0 ab.

<u>Stetigkeit</u>: $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ist stetig auf Ω

$\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\forall x_0 \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0 \text{ s.d. } \forall x \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

Defn $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist gleichmässig stetig (uniform continuity) falls gilt.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \text{s.d} \ \forall x, x_0 \in \Omega \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

$\forall x, \forall x_0$

Satz. Sei $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig, K kompakt

$[a, b]$.

Dann ist f gleichmässig stetig.

z.B. $f(x) = x^2$

$f(x) : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f gleichmässig stetig.

Bsp. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sei $\boxed{x, x_0 \in [0, 4]}$.

- $0 \le x, x_0 \le 4$, und $0 \le x + x_0 \le 8$

$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0||x + x_0| \le |x - x_0| \cdot 8 \le \varepsilon$.

für $\varepsilon > 0$, δ wählen wir $\delta = \varepsilon / 8$

§ 5. Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$.

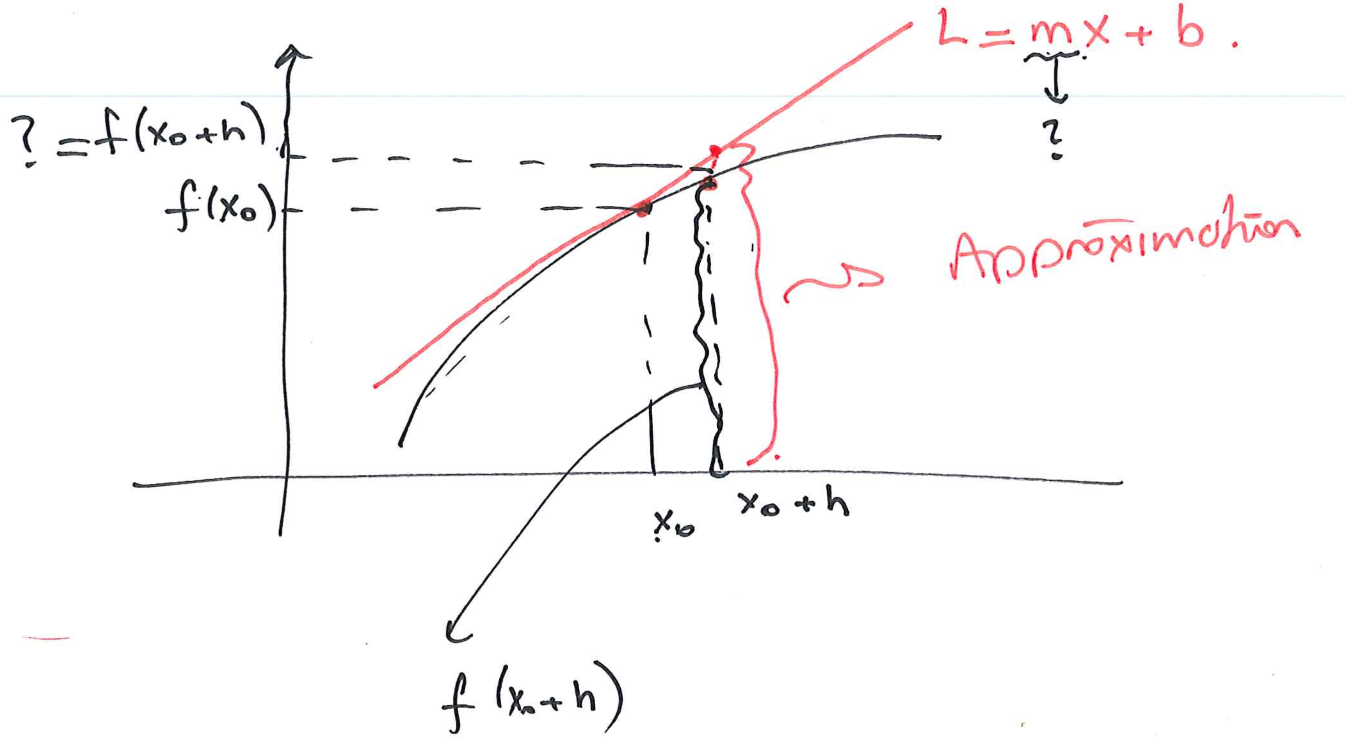
Wir möchen lokaler Veränderungen von Funktionen Berechnen.

Hierzu wichtig ist, die Ableitung einer Funktion ?

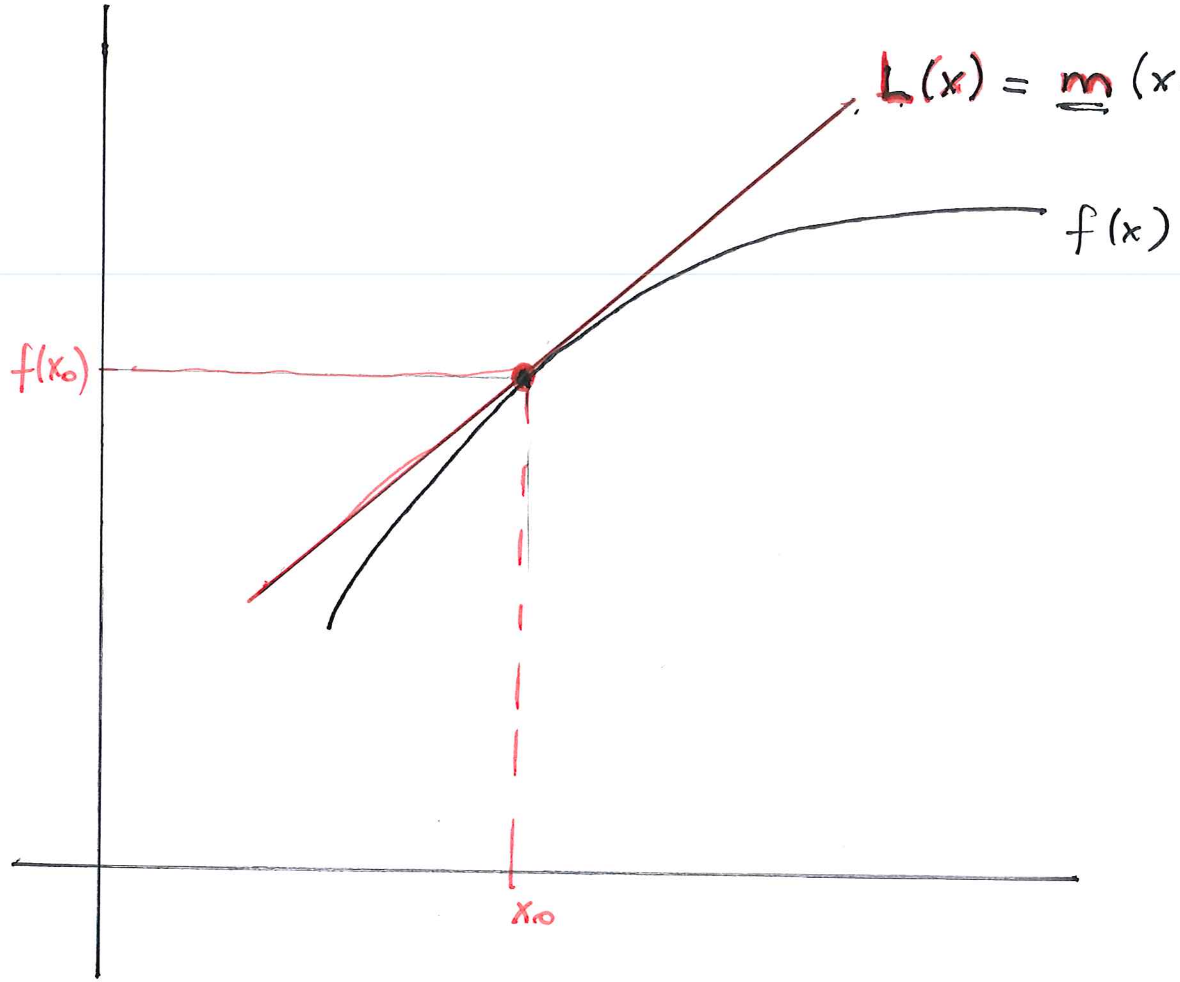
Die Geometrische Entsprechung der Ableitung ist die Tangentensteigung.

Seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Wir wollen f in der nähe von x_0 approximieren



$$L(x) = \underline{m}\,(x - x_0) + f(x_0)$$

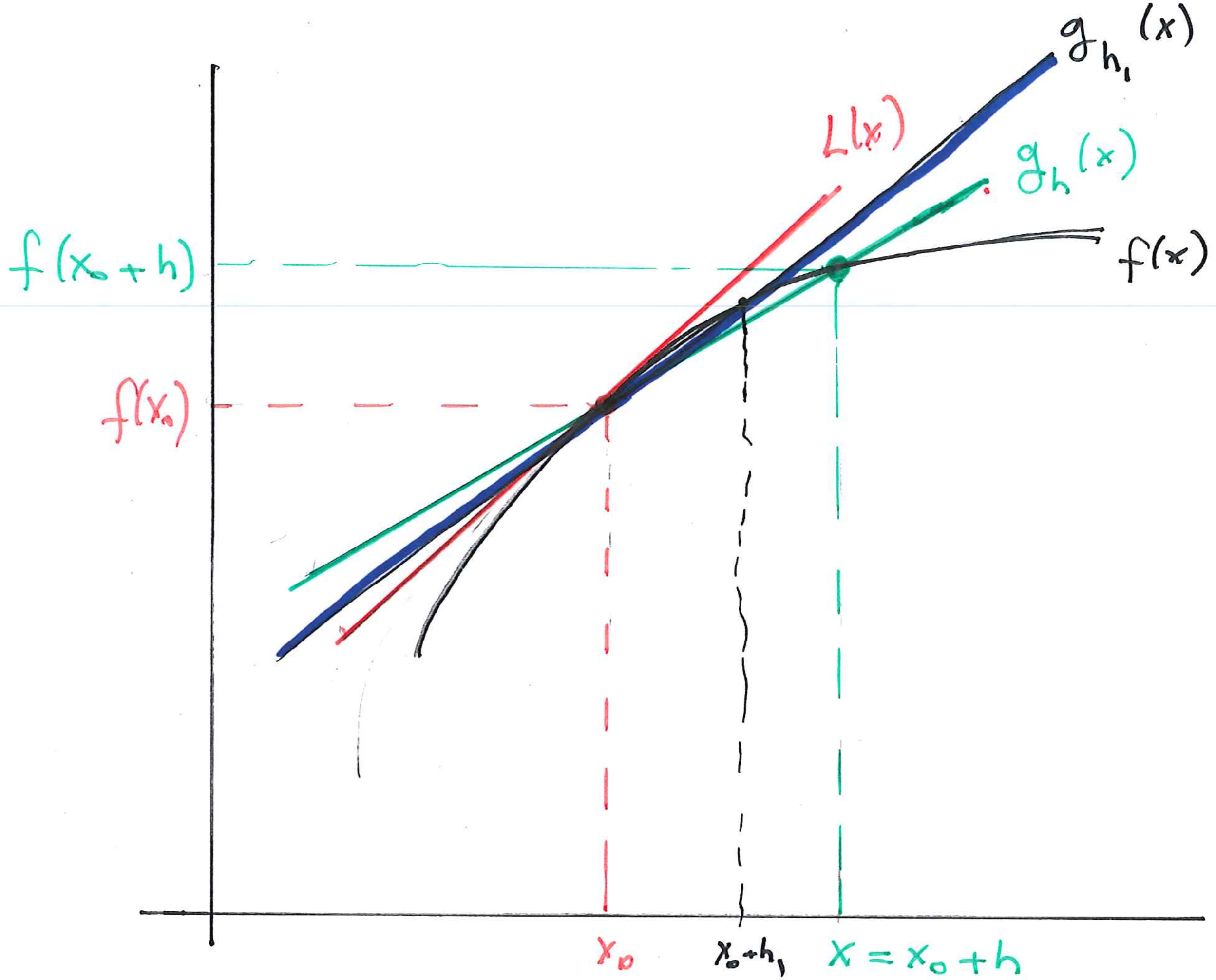


m = Steigung der Tangente

Die Tangente an den Graph von f durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ stellt eine gute Approximation dar.

Die entsprechende Annäherung der Funktion heisst <u>Linearisierung</u> !

Diese erhalten wir geometrisch anschaulich aus der Sekante an f durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ $(x_0+h, f(x_0+h))$.


$g_{h_1}(x)$
$L(x)$
$g_h(x)$
$f(x_0+h)$
$f(x)$
$f(x_0)$
x_0
x_0+h_1
$x = x_0+h$

Analytisch: Die Steigung der Sekante g_h

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =: m_h .$$

$$g_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0) .$$

Wir betrachten den Grenzwert als $h \to 0$.

Wir betrachten den sogenannten Differenzquotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ (welcher die Steigung der Sekante g_h angibt)

und wollen die Steigung der Tangente als die Grenzwert

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Differential}} \quad \text{erhalten.}$$

(Differentialquotient) $\frac{df}{dx}$

Defn 5.5.1. (1) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$.

f heisst <u>differenzierbar an der Stelle x_0</u> falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert}$$

In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit

$f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

Er heisst <u>die Ableitung</u> oder <u>das Differenzial</u> von f an der Stelle x_0. (<u>Derivative of f at $x = x_0$</u>).

(2) Analog heisst $f=(f_1,\dots,f_n):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ an der Stelle x_0 differenzierbar falls jede der Komponentenfunktion f_i an der Stelle x_0 differenzierbar ist.

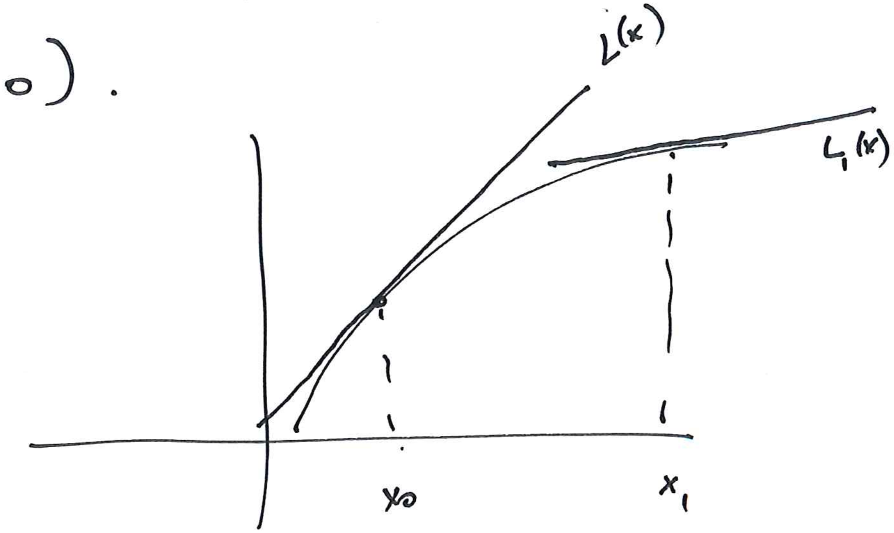
$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0) \dots f_n'(x_0))$$

(3) • $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ heisst auf Ω differenzierbar falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ diff. ist.
In diesem Fall, definiert die Kollektion aller $x_0 \to f'(x_0)$ eine neue Funktion. Die Funktion $x \to f'(x)$ heisst Ableitungsfunktion von f.

Bmk. Der Graph einer differenzierbaren (nichtlinear) Funktion lässt sich linear durch eine Tangente annähren.

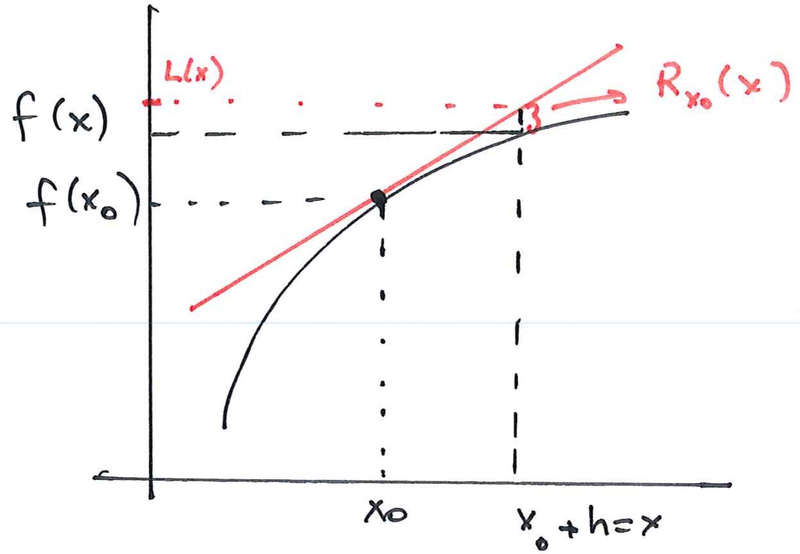
Diese Tangent hat die Gleichung.

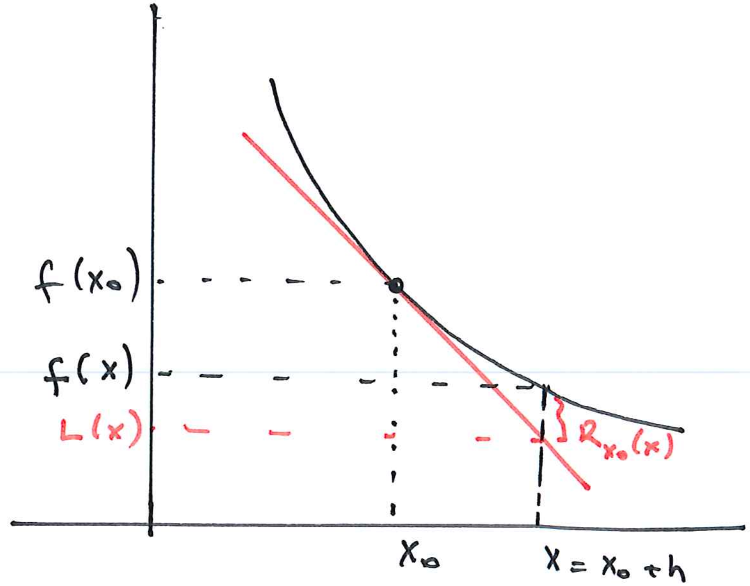
$$\underbrace{L(x)}_{\text{variable}} = \underbrace{f(x_0)}_{\text{eine feste Stelle.}} + f'(x_0)(x - x_0).$$



$L(x)$ ist eine <u>gute</u> Näherung für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0. Warum?

Sei $f(x) = L(x) - R_{x_0}(x)$ (oder $f(x) = L(x) + R_{x_0}(x)$).





$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \pm R_{x_0}(x)$$

Dann $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f'(x_0)\,\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} \pm \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0}$$

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)} = \underbrace{\lim_{x\to x_0} f'(x_0)}_{f'(x_0)} \pm \lim \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0}.$$

$$f'(x_0) \pm \lim \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x-x_0} = 0$$

d.h wenn $x \to x_0$ strebt die Restglied $R_{x_0}(x)$ scheller nach Null als $x - x_0$.

Bsp. (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x \to mx + b$.

ist überall differenzierbar mit $f'(x) = m$

Beweis: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{m(x - x_0)}{x - x_0} = m$.

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} = m. \Rightarrow f'(x_0) = m. \ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

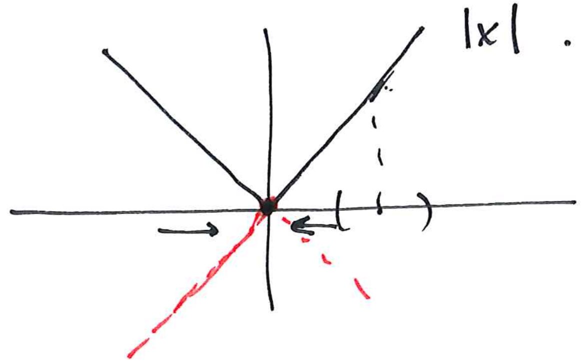
(2) $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}. = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h}.$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0.$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 2x} \quad \forall x$$



(3). $f(x) = |x|$

$$f(x) - f(0) = \begin{cases} +x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Also ist $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

Also $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existiert nicht!

f ist für alle $x_0 \neq 0$ differenzierbar aber nicht für $x_0 = 0$.

(IV). $\mathrm{Exp} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathrm{Exp}'(x) = \mathrm{Exp}(x)$.

($D : \{f : f \text{ diff}\} \longrightarrow \{f : f \text{ diff.}\}$. ist eine Linear Operator

$\mathrm{Exp}(x)$ ist ein Eigenfunktion von D mit Eigenwert 1.)

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x = x_0 + h$.

$$\frac{\mathrm{Exp}(x_0 + h) - \mathrm{Exp}(x_0)}{h} = \frac{\mathrm{Exp}(x_0)\left[\mathrm{Exp}\, h - 1\right]}{h} = \mathrm{Exp}(x_0)\left(\frac{\mathrm{Exp}\, h - 1}{h}\right)$$

Aber $\frac{\mathrm{Exp}\, h - 1}{h} = \frac{\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) - 1}{h} = \frac{h + \frac{h^2}{2!} + \cdots}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Exp} h - 1}{h} = 1.$$

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Exp}(x_0+h) - \operatorname{Exp}(x_0)}{h}}_{=} = \operatorname{Exp}(x_0) \lim \left(\frac{\operatorname{Exp} h - 1}{h}\right) = \operatorname{Exp}(x_0).$$

$$\boxed{\operatorname{Exp}'(x_0) = \operatorname{Exp}(x_0)}$$

5. $\sin'(x) = \cos(x)$

$\cos'(x) = -\sin(x)$.

Aus den Additionsgesetz für sin und cos.

Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{[(\sin x \cosh + \cos x \sinh) - \sin x]}{h}.$$

$$= \sin x \frac{[\cos(h) - 1]}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}.$$

Da $\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$, $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$. đúng.

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}}_{\boxed{\sin'(x)}} = \sin x \underbrace{\lim \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right)}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}.$$

$$\boxed{\sin'(x) = \cos x}.$$