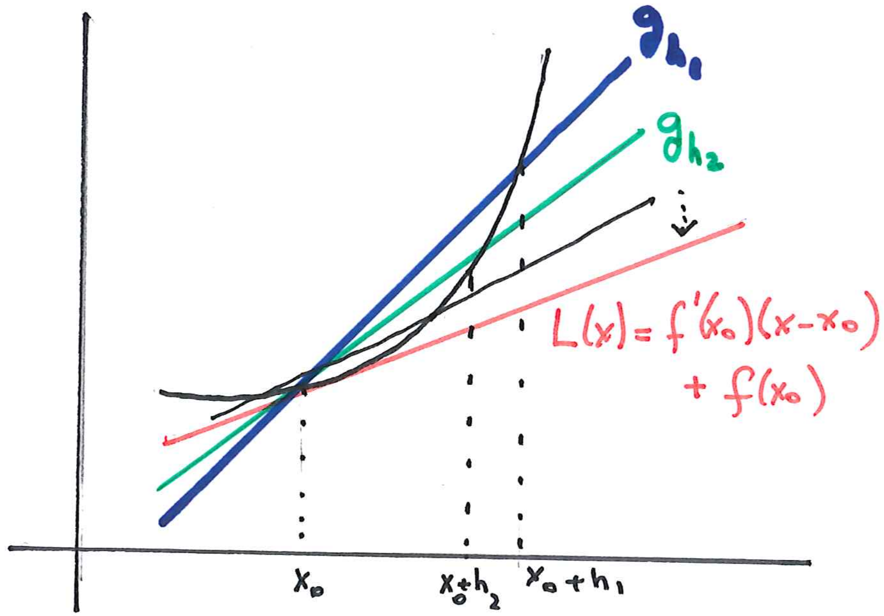
Die Ableitung

Die geometrische Entsprebung der Ableitung ist die Tangentensteigung



Analytisch: Wir betrachten den Grenzwert von der Steigung der Sekante

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Defn : • Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$

f heisst differenzierbar an der Stelle x_0

falls der Grenzwert $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit

$f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet

Er heisst die Ableitung oder das Differential von f

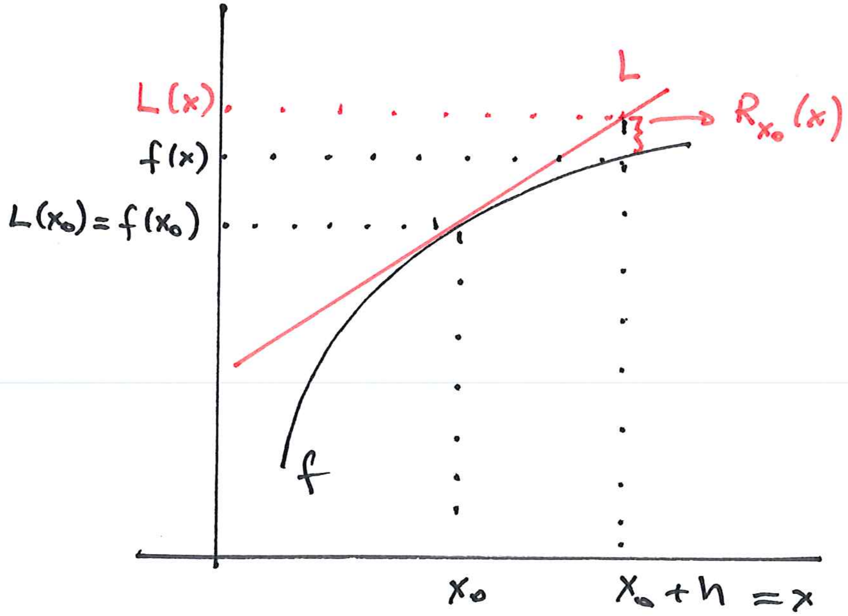
an der Stelle x_0

• f heisst auf Ω differenzierbar falls f an jeder Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar ist.

Die Funktion $x \mapsto f'(x)$ heisst Ableitungsfunktion von f

Sei f differenzierbar in x_0

Die Tangente $L(x)$, ist eine gute Näherung für $f(x)$ in einer Umgebung von x_0.



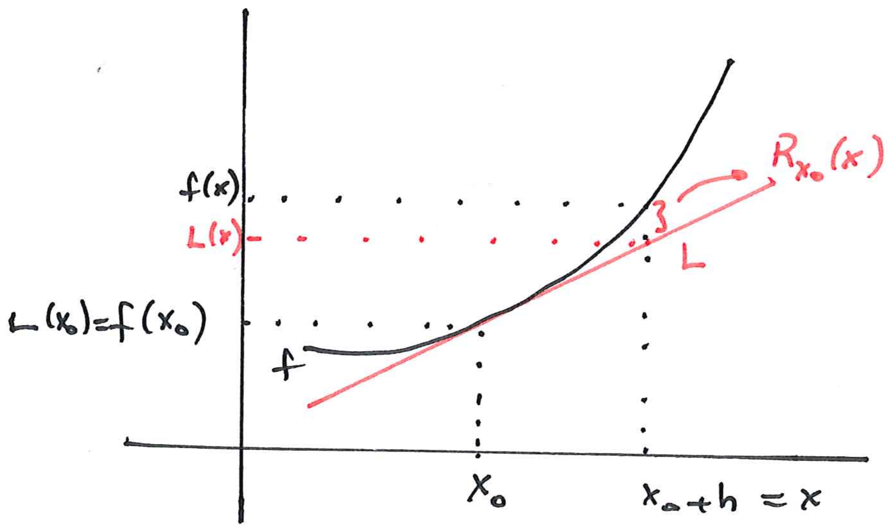
$$f(x) = L(x) \pm R_{x_0}(x)$$

$$= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \pm R_{x_0}(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{R_{x_0}(x)}{x - x_0} = 0$$

d.h wenn $x \to x_0$, strebt die Restglied $R_{x_0}(x)$ schneller nach Null als $(x - x_0)$.



Bsp.

1. $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

2. $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

3. $f(x) = \mathrm{Exp}(x) \Longrightarrow f'(x) = \mathrm{Exp}(x)$.

4. $f(x) = \sin(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

5. $f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -\sin(x)$

6. $f(x) = |x| \Longrightarrow$ $f'(x) = 1$ falls $x > 0$
   $f'(x) = -1$ falls $x < 0$

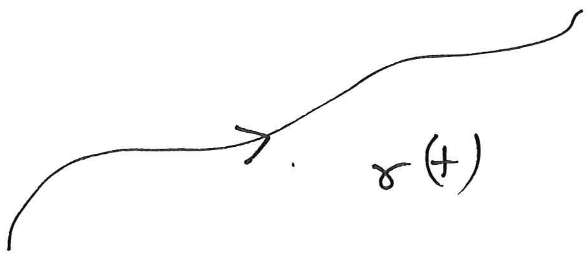
f ist <u>NICHT</u> differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$.

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion:

Die zeitliche Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad I \subset \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \gamma(t)$$

wobei t die Zeit, und $\gamma(t)$ der Ort des Massenpunktes

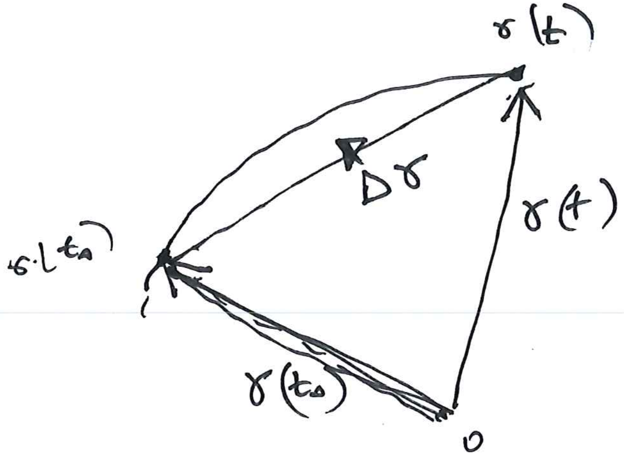


Dann ist die Ableitung

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

die Geschwindigkeit, mit der sich der Massenpunk bewegt.

Erklärung: In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massepunkt die Strecke $\Delta r = r(t) - r(t_0)$ zurück.



die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\dfrac{\Delta r}{\Delta t} = \dfrac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0}$

Für $t \to t_0$ erhällt man die momentane Geschwindigkeit

$$r'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Der Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

Satz 5.1.1 Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, so ist f an der Stelle x_0 auch stetig.

d.h Diff $\Longrightarrow$ stetig.

Also "Differenzierbar" ist "mehr" als "Stetig"

Bmk. Die Umkehrung von Satz 5.1.1 gilt nicht!.

z.B $f(x) = |x|$ ist stetig in $x=0$ aber nicht differenzierbar.

Beweis: f ist diff in x_0. $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

z.z: $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ ist stetig} \\ \text{d.h. } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{array} \right\}$.

Sei $g: \Omega \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

und, Da f diff. in x_0 ist, hat g ein Grenzwert in $x = x_0$

und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f'(x_0)$

For $x \neq x_0$ $\quad f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0) + f(x_0)$

$$= g(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$ ist die Summe von 2 funktionen, $g(x)(x - x_0)$, $f(x_0)$.

Die beiden Funktionen besitzen ein Grenzwert an der stelle x_0

Dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)(x-x_0) + \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0)$

$$= \lim_{x \to x_0} g(x) \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x-x_0)}_{} + \lim_{x \to x_0} f(x_0).$$

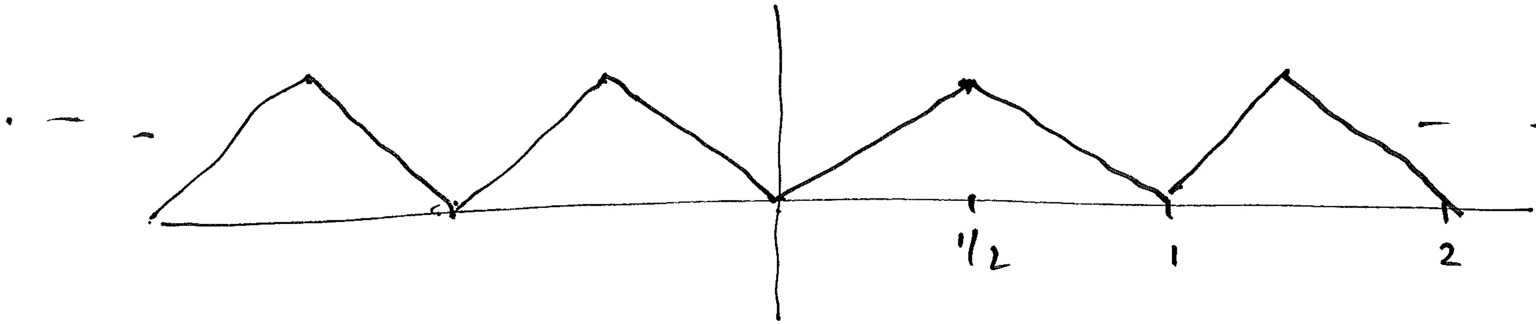
$$= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ ist stetig in x_0 !

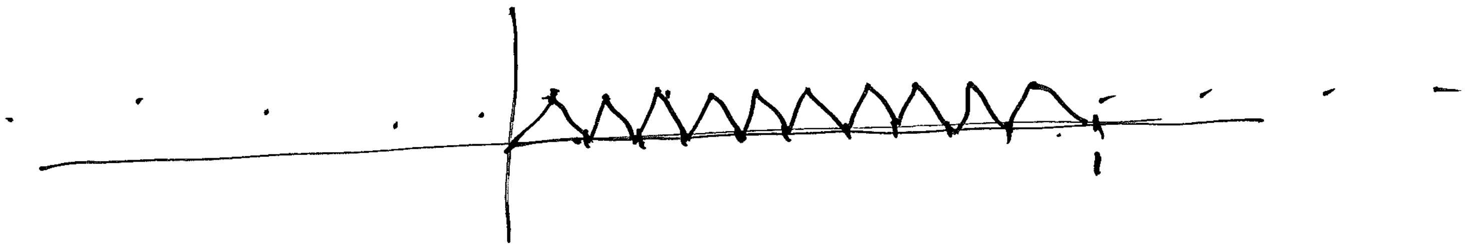
Bsp. (Van der Waerden ~ 1930)
Das folgende Bsp zeigt dass es stetige funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die an keine stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist!

Sei für $x \in \mathbb{R}$, $\langle x \rangle$ = Distanz von x zur nächsten Ganzen Zahl.

"sawtooth" – function.



Graph von $\dfrac{\langle 10x \rangle}{10}$



Sei $f(x) := \langle x \rangle + \dfrac{\langle 10x \rangle}{10} + \dfrac{\langle 10^2 x \rangle}{100} + \cdots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k}.$$

Da $0 \leq \langle 10^k x \rangle < \frac{1}{2}$, folgt die Abs. konvergenz

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle 10^k x \rangle}{10^k} < \underbrace{\sum \frac{1}{2} \frac{1}{10^k}}$$

<u>Behauptung:</u>

<u>f ist stetig</u>:

<u>Beweis:</u> Sei $f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n}$. stetig.

Wir möchten beweisen das $f_k(x) \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} f(x)$

Mittels einer Satz von letzte woche: Sei $f_k(x)$ stetige funktion

$f_k(x) \xrightarrow[\text{gleich.}]{} f(x) \Longrightarrow f(x)$ ist auch stetig.

$$|f_k(x) - f(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n} \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{\langle 10^n x \rangle}{10^n} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^n}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{10^{-k}}{9}$$

$$= \frac{1}{18} \frac{1}{10^k}$$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{10^k}$$

$\sup |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Longrightarrow f_k \to f$ konvergiert gleichmässig.

$\Rightarrow f$ ist stetig. ⑩

Satz 5.1.2. Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar. Dann sind die Funktionen $f \pm g$, fg und falls $g(x_0) \neq 0$ auch die Funktion f/g an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gelten die folgende Formel.

1) $(af \pm bg)'(x_0) = a f'(x_0) \pm b g'(x_0) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

2) $(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Beweis: (2) $\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \left[f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)\right] / (x-x_0)$

$$= \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x)}{x-x_0} + f(x_0)\frac{[g(x) - g(x_0)]}{x-x_0}.$$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) g(x)$$

$$+ \lim_{x\to x_0} f(x_0) \left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]$$

g diff. in x_0 $\Longrightarrow$ g ist stetig in x_0

$$\Longrightarrow (fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$ ☒.

Bsp. S. 1.2. Für $n \geq 1$ ist die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^n$$ differenzierbar mit

$$f_n'(x) = n x^{n-1}$$

Beweis: Induktion: $f_0(x) = 1 \cdot x^0$, $f_0'(x) = 0 = 0 \cdot x^{0-1}$

$n=1$, $n=2$, $f_1(x) = x$ $\quad f_1'(x) = 1$

$\qquad f_2(x) = x^2$ $\quad f_2'(x) = 2x$

Wir nehmen an dass die Formel für $n-1$ gilt.

$$f_{n-1}'(x) = (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2}$$

$$f_n(x) = x^n = x^{n-1} \cdot x = f_{n-1}(x) \cdot x$$

$$f_n'(x) = f_{n-1}'(x) \cdot \boxed{x} + f_{n-1}(x)[x]'$$

$$= (n-1)x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1 = (n-1)x^{n-1} + x^{n-1}$$

$$= n x^{n-1} \checkmark .$$

(2) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$

Insbesondere ~~da~~ ist die Ableitung eines Polys von Grad n, ein Polynom von Grad $(n-1)$.

(3) $f(x) = \frac{x^3+1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{(x^3+1)' \cdot \cos x - (x^3+1)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(3x^2)\cos x + (x^3+1)\sin x}{(\cos x)^2}$$

Satz 5.1.3. (Kettenregel) (Chain rule).

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ diff. Dann ist die Funktion $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt

$$\boxed{\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).}$$

Beweis: Übung.

Bsp. (1) $h(x) = \operatorname{Exp}(x^5 + x^3 + 5)$

$$h'(x) = \underbrace{\operatorname{Exp}'(x^5 + x^3 + 5)}_{g'(f(x))} \cdot (x^5 + x^3 + 5)'$$

$$= \operatorname{Exp}(x^5 + x^3 + 5) \cdot (5x^4 + 3x^2)$$

(2) $h(x) = (37x^4 + 3x^2 + 1)^{10^{90}}$

$g(x) = x^{10^{90}}$

$f(x) = (37x^4 + 3x^2 + 1)$

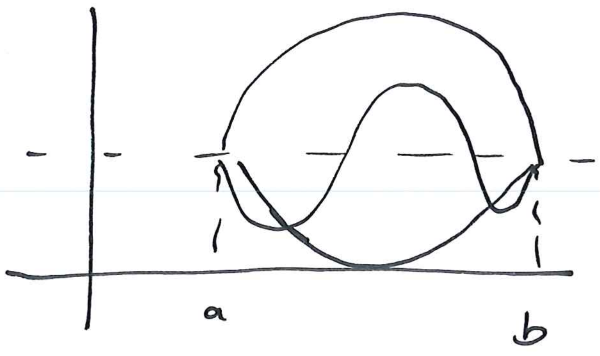
$$h'(x) = \Big[\underbrace{10^{90}(37x^4 + 3x^2 + 1)^{10^{90}-1}}_{g'(f(x))}\Big] \cdot f'(x)$$

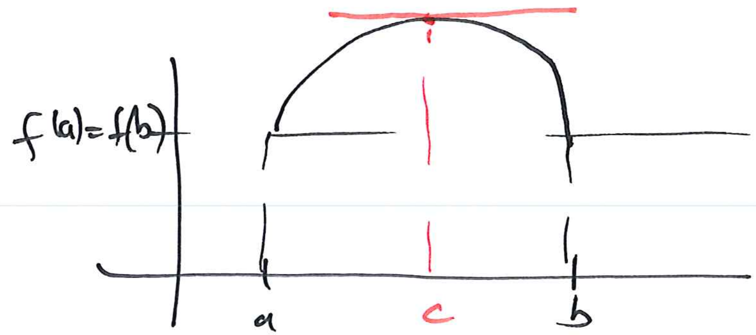
$$= 10^{90}(37x^4 + 3x^2 + 1)^{10^{90}-1} \cdot \big[(37 \cdot 4)x^3 + 6x\big]$$

(3) $\sin(\exp(x^2+1))^{100} = h(x)$ . .

$h'(x) = ?$.

§5.2 Der Mittelwertsatz und Folgerungen





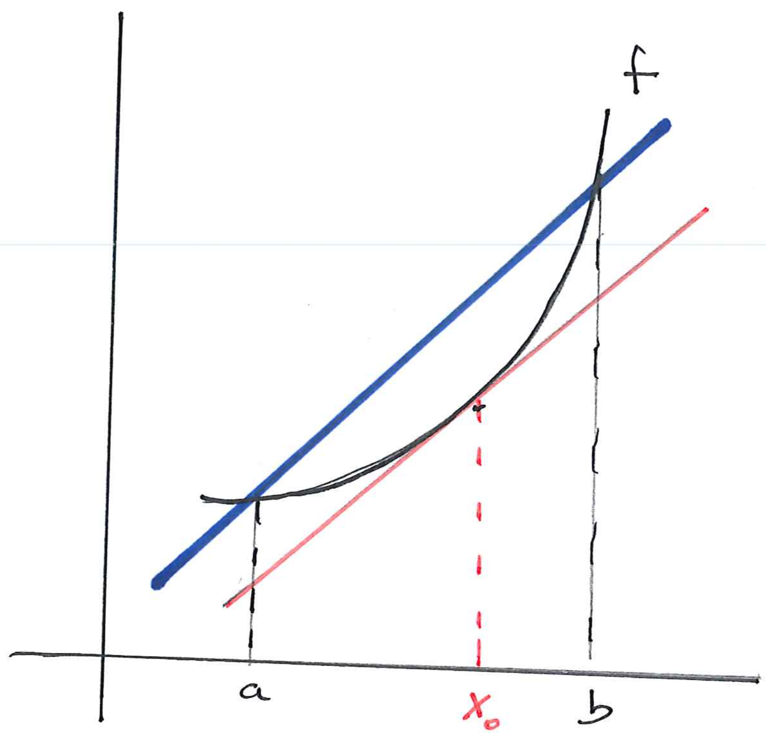
Satz von Rolle Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

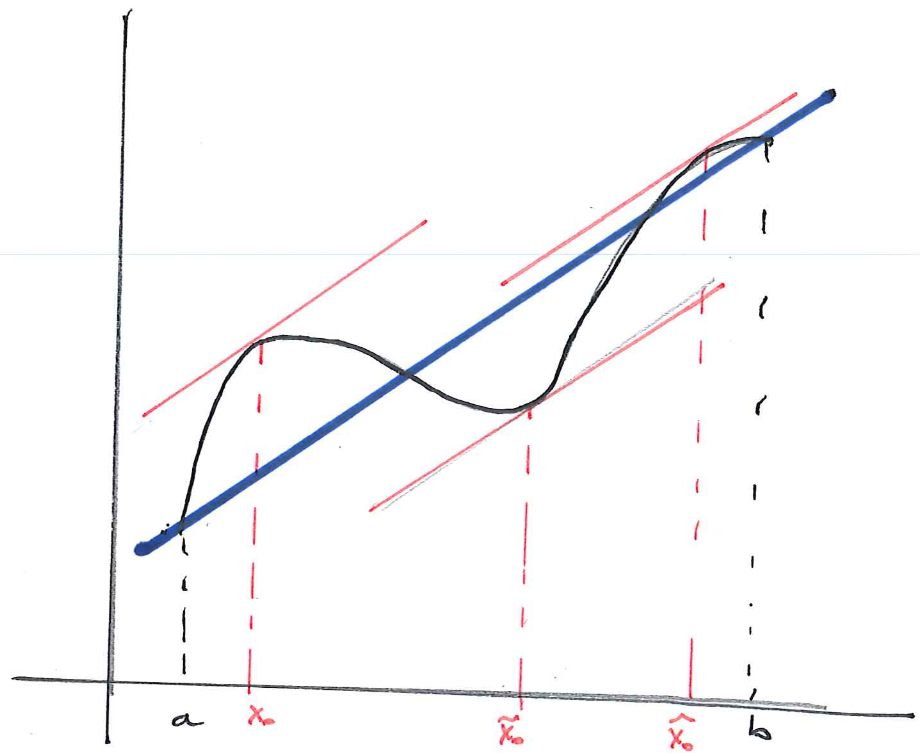
Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es $c \in [a,b]$

so dass $f'(c) = 0$.

d.h. Die Tangente an der Stelle $x = c$ ist Horizontal.

Mittelwertsatz: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ diff. Dann gilt $c \in [a,b]$ so dass $\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = f'(c)$





d.h. Es gibt $c \in [a,b]$ so dass

die Steigung der Tangente an der Stelle c = die Steigung der Sekante $= \frac{f(b)-f(c)}{b-a}$.

Lemma Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Sei $z^+ \in [a,b]$ mit $f(z^+) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Wir nehmen an dass $\underline{z^+ \in (a,b)}$. Dann gilt $\underline{f'(z^+) = 0}$.

Bmk: ① Eine Analog Aussage gilt für $z^- = \min\{f(x)\}$.

Sei $z^- = \min f$, $z^- \in (a,b) \Rightarrow f'(z^-) = 0$.

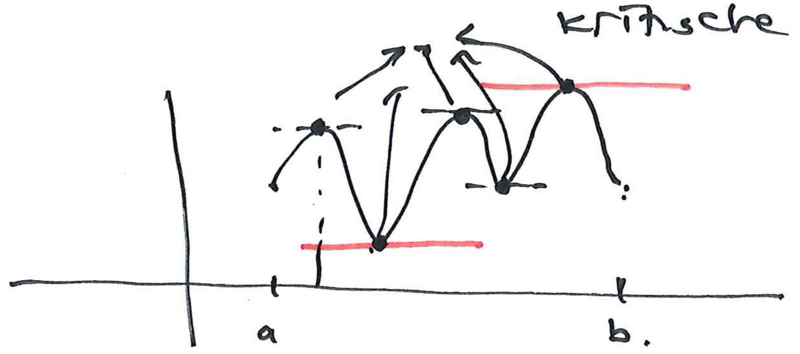
② z^+, z^- existieren Nach Satz 4.2.3.

③ Die Voraussetzung $z^+ \in (a,b)$ ist wichtig.

z.B $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \to x$

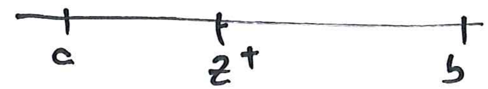
Dann $f'(x) = 1 \ \forall x$. $z^+ = 1$, $z^- = 0$ und $f'(z^+) \neq 0$
$f'(z^-) \neq 0$.

Bemerkung



(4) Defn : Eine kritische Stelle einer Funktion ist eine Punkt x_0 an der f' null oder undefiniert ist.

Beweis (Lemma) Sei $z^+ \in (a, b)$



$(a, z^+) \neq \emptyset$

$(z^+, b) \neq \emptyset$

Es gibt $(x_n) \in (a, z^+)$ mit $\lim x_n = z^+$ (z.B $x_n = z^+ - \frac{1}{n}$)

und es gibt $(y_n) \in (z^+, b)$ mit $\lim y_n = z^+$ (z.B $y_n = z^+ + \frac{1}{n}$)

Für $n \geq 1$ folgt $f(x_n) - f(z^+) \leq 0$ ($f(z^+)$ ist max.).

und $f(y_n) - f(z^+) \leq 0$.

$$\left.\begin{aligned} f'(z^+) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(x_n) - f(z^+)}^{\leq 0}}{\underbrace{x_n - z^+}_{<0}} \geq 0 \\ f'(z^+) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{f(y_n) - f(z^+)}^{\leq 0}}{\underbrace{y_n - z^+}_{>0}} \leq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(z^+) = 0$$