Differentiationsregeln.

Sei f, g differenzierbar. Dann gilt

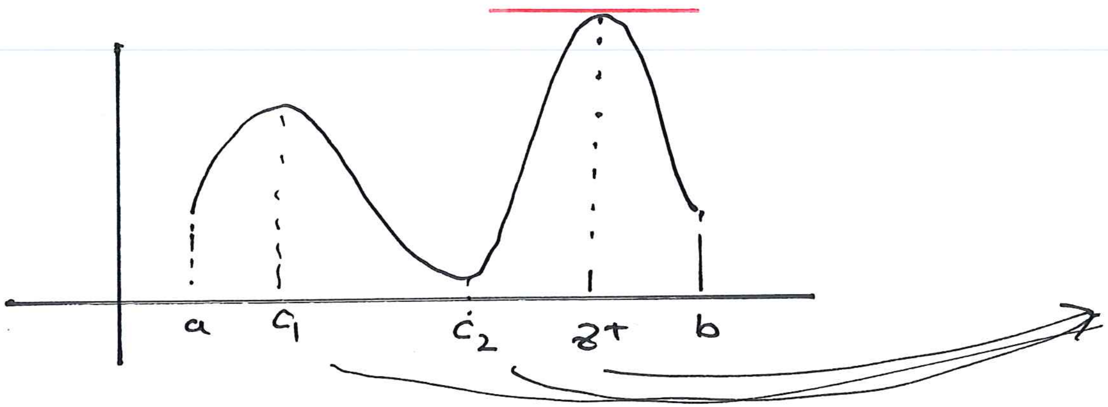
1) $(af \pm bg)'(x) = a f'(x) \pm b g'(x)$

2) $(fg)'(x) = f'(x) g(x) + g'(x) f(x)$

3) $\left(f/g\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, falls $g(x) \neq 0$

4) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ – Kettenregel.

Lemma Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar. Sei $z^+ \in [a,b]$ mit $f(z^+) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Wir nehmen an dass $z^+ \in (a,b)$. Dann gilt $f'(z^+) = 0$.



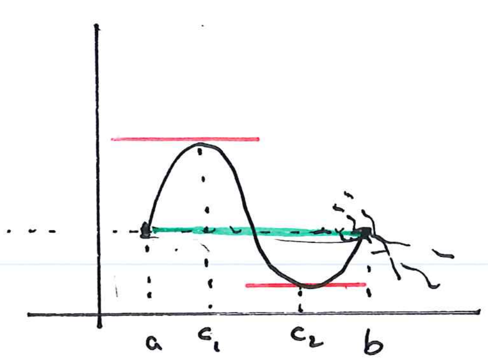
Kritische Stelle.

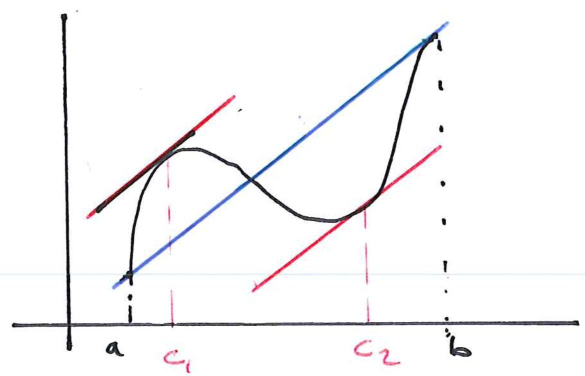
Defn Eine kritische Stelle einer Funktion ist ein Punkt x_0 an der f' null oder undefiniert ist.

Mittels Lemma: Für jede extremal Stelle z, gilt $f'(z) = 0$; d.h. Jede Extremal Stelle ist eine kritische Stelle.

Satz von Rolle: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b)

Falls $f(a) = f(b)$, dann gibt es $c \in [a,b]$ sodass $f'(c) = 0$





Mittelwertsatz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b)

Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Lemma Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar

Sei $z^+ \in [a,b]$ mit $f(z^+) = \max f$. Wir nehmen an

dass $z^+ \in (a,b)$. Dann gilt $f'(z^+) = 0$

Beweis Idee: ist sich auf den Fall

$g(a) = g(b) = 0$ zurückzuführen und

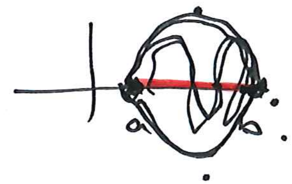
der Lemma anwenden.

Die Gleichung der Sekante durch

die Punkte $(a, f(a))$, und $(b, f(b))$

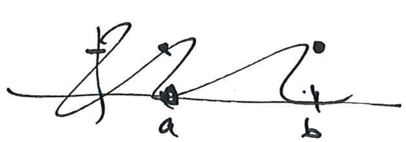
ist

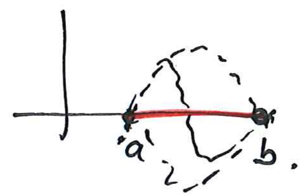
$$S(x) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a) + f(a).$$



Sei nun $\boxed{g(x) := f(x) - S(x)}$. Dann.

$g(a) = 0 = g(b)$





4

Fall 1 : g ist identisch null. Also $g(x) = f(x) - S(x)$

~~dh~~ $g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = S(x)$ und

die Aussage stimmt $\forall\, x_0 \in (a,b)$.

Fall 2: $g \not\equiv 0$. Also ist entweder

$\max\limits_{x \in [a,b]} (g(x)) > 0$ oder $\min\limits_{x \in [a,b]} g(x) < 0$.

$\downarrow$

In diesem Fall sei z^+ mit $g(z^+) = \max g(x)$.

Dann ist $z^+ \in (a,b)$ (Da $g(a) = g(b) = 0$, $g \not\equiv 0$

$g(z^+) > 0$.

Noch lemma $g'(z^+) = 0$

$\Rightarrow g'(z^+) = \left(f(\cancel{x}) - S(\cancel{x})\right)'\Big|_{x=z^+} = f'(z^+) - S'(z_+)$

$$\Rightarrow \quad f'(z^+) = s'(z_+) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, z^+ \in (a,b) \quad \text{so dass} \quad f'(z^+) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Kor 5.2.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wie in Mittelwertsatz

1) Falls $f' \equiv 0$ auf (a,b), so ist f konstant

2) Falls $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ so ist f mon. wachsend.
$(f'(x) > 0)$ (strikt mon. wach.)

3) Falls $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$, so ist f mon. fallend
$(f'(x) < 0)$ (strikt mon. fallend)

Beweis i) Seien $a \le x < y \le b$ beliebig und sei nach Mittelwertsatz $x_0 \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$$

Da $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$, $\quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 0$

$$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f \text{ ist konstant.}$$

2.3 Übung.

Bsp. Lemma: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f'(t) = \lambda (f(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei λ ist eine feste Zahl in $\mathbb{R}$.

Dann gilt $f(t) = f(0) e^{\lambda t}$

Anders gesagt. Die Menge der Lösungen von $f' = \lambda f$ ist eine 1-dim'le Vektorraum.

$$V_\lambda := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = \lambda f \}$$
$$= \{ K e^{\lambda t} \mid K \in \mathbb{R} \}$$

Beweis: Offensichtlich gilt für

$$h(t) = f(0) e^{\lambda t}$$

$$h'(t) = f(0) \lambda e^{\lambda t} = \lambda f(0) e^{\lambda t} = \lambda h(t) .$$

Betrachte nun $g(t) = \frac{f(t)}{e^{\lambda t}} = f(t)\, e^{-\lambda t}$

z.z ist $g(t) = \text{konstant}$, und $\text{konstant} = f(0)$

$$g'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} f(t) + e^{-\lambda t} f'(t)$$
$$= e^{-\lambda t}\left[-\lambda f(t) + \lambda f(t)\right] = 0,$$

$\Rightarrow g(t) = \text{konstant}$ ✓.

$\Rightarrow f(t) = K e^{\lambda t}$

$f(0) = K e^{0} = K$, $\Rightarrow K = f(0)$

$\Rightarrow f(t) = f(0)\, e^{\lambda t}$

1P.

9.

(2)

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(x)$

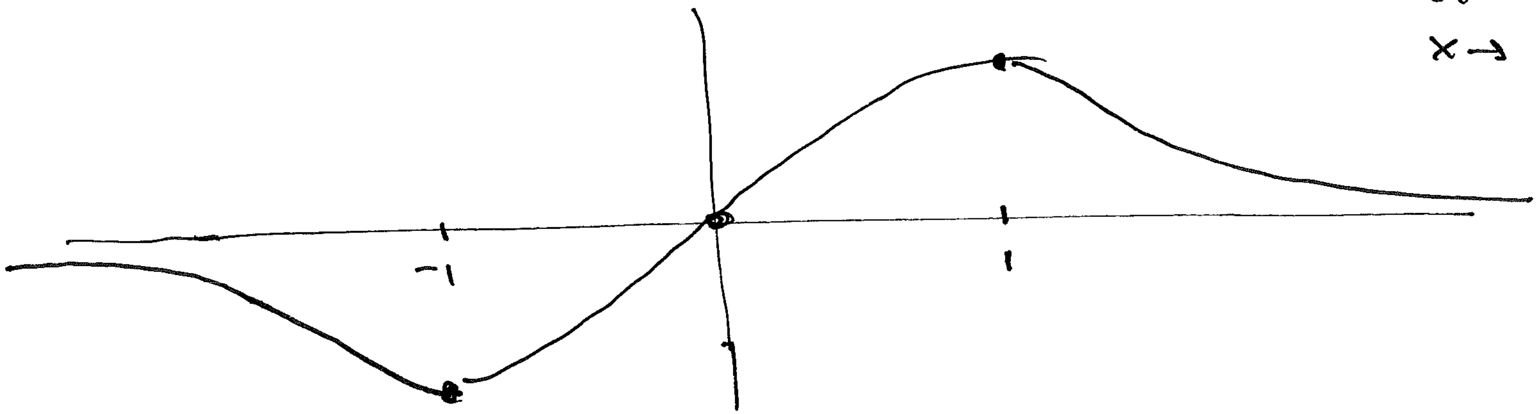
$f'(\pm 1) = 0.$

$\Rightarrow \pm 1$ sind kritische Stellen.

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1+1^2} = 1$, $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$



11

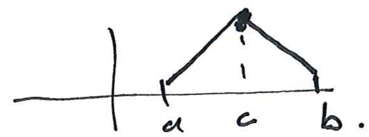
Bernoulli

Satz (L'Hospital) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei $a < c < b$. Wir nehmen an, dass

f, g in $(a,c) \cup (c,b)$ differenzierbar sind und

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,c) \cup (c,b)$.



Weiter sei (i) $f(c) = g(c) = 0$

(ii) $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \neq c}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Dann ist $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,c) \cup (c,b)$

und $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Bsp. 1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

$f(x) = x^3 - 1$

$g(x) = x^2 - 1$

$g'(x) = 2x \neq 0 \quad \forall x \in (0{,}5; 2)$

$f(1) = 0 = g(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{3x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$.

~~Dann gilt~~

Dann gilt $\lim \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$.

$\lim \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$.

2 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{=} \lim \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

$g(x) = x$

$g'(x) = 1 \neq 0$

3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim \frac{2x \cos x^2}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos 2x = 1.$

$\parallel$

$\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}$ $\quad y = x^2$

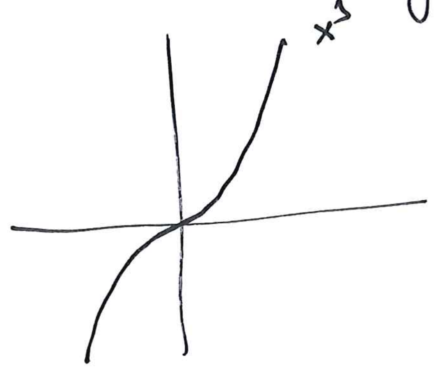
4 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = \frac{-1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{-1}{2}.$

Fundamental Frage Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff

und bijektive und sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Inverse

funktion. Ist dann g auch differenzierbar?

Bsp. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^3$ Ist überall diff. und bijektive



Die Umkehrfunktion

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to x^{1/3}$$

Aber g in $x=0$ nicht differenzierbar.

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h-0} = \lim \frac{h^{1/3}-0}{h} = \lim h^{-2/3} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \to \infty$$

$\Rightarrow$ $g'(0)$ existiert nicht!,

Was ist passiert an der Stelle $x=0$ mit f?

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(0) = 0$$

Bmk. Falls $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bij., differenz. und auch die Umkehr funk $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist dann folgt aus $(f \circ g)(x) = x$ und Kettenregel.

$$1 = (f\circ g)'(x) = [f'(g(x))] \cdot [g'(x)]. \quad \forall x.$$

Insbesondere $\Rightarrow$ $g'(x) \neq 0$, $\quad f'(g(x)) \neq 0$.

Dies ist also ein Notwendige Bedingung zur Existenz der Ableitung von $g = f^{-1}$ und

In diesem fall $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

Satz 5.2.2 (Umkehrsatz)

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ $\forall\, x \in (a,b)$

Seien $c = \inf(f)$, $d = \sup f$

$-\infty \leq c < d \leq \infty$.

Dann ist $f : (a,b) \to (c,d)$ ist bijektive.

und die Umkehrfunktion

$f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ ist differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \boxed{\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = (f^{-1})'(y)}$$

<u>Kor 5.2.4.</u> Die Funktion $\overset{g}{\overbrace{\mathrm{Log}}} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und $\mathrm{Log}'(y) = \frac{1}{y}$ $\forall y \in (0,\infty)$

$$\left(f = \mathrm{Exp}(x) \qquad y = \mathrm{Exp}'(\mathrm{Log}(y)) \right)$$

Beweis $\quad Exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ erfüllt alle Bedingungen von Umkehrsatz.

Exp ist differenzierbar, $\quad Exp'(x) = Exp(x) > 0$

Also $\quad Log(Exp(x)) = x$ $\quad$ Kettenregel

$$Log'(Exp(x)) \cdot Exp(x) = 1.$$

$Exp\,x = y$ $\qquad Log'(y) \cdot y = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Log'(y) = \frac{1}{y}}$

Bsp. Wir können mittels Exp. funktion die verallgemeinerte Potenz Funktion $x \to x^{\alpha}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ definieren.

Für $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$ $\qquad \underline{x^n = e^{n \log x}}$

$$x^n = \underbrace{x \cdots x}_{n\text{mal.}} = \underbrace{e^{\log x} \cdot e^{\log x} \cdots e^{\log x}}_{n \text{ mal}} = \left(e^{\log x}\right)^n = e^{n \log x}.$$

Wir definieren also für $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \boxed{x^\alpha := e^{\alpha \log x}}$$

Dann $\underline{f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}}$

<u>Beweis</u>: $f(x) = x^\alpha := e^{\alpha \log x}$

$$f'(x) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Exkurs: (1) Die Exp. funktion wächst schneller als jede Potenz

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots > \frac{x^n}{n!}$$

Insbesondere $e^x > x \quad \forall x > 0$

(2) Die Log. funktion ist strikt mon. wachsend

$$e^x > x \implies \log e^x > \log x \quad \forall x > 0.$$

$$\implies x > \log x \quad \forall x$$

Für $n > 0$ $\quad x^n > \log x^n = n \log x.$

$x^n > n \log x \quad \forall x$

Die Log Funktion wächst langsamer als jede positive Potenz