Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) differenzierbar.

1) Falls $f' \equiv 0$ auf (a,b), so ist f konstant.

2) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist monotone wachsend.

$f'(x) > 0$ " $\Rightarrow$ " " strikt " "

3) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist monotone fallend.

$f'(x) < 0$ " $\Rightarrow$ " " strikt " "

4) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f'(t) = \lambda(f(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

wobei λ ist ein feste Zahl in $\mathbb{R}$. Dann gilt $f(t) = f(0)e^{\lambda t}$

d.h. $V_\lambda := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f' = \lambda f\} = \{Ke^{\lambda t} \mid K \in \mathbb{R}\}$

d.h V_λ ist 1-dimensional Vektorraum, mit basis $\{e^{\lambda t}\}$.

5) Regel von Bernoulli - de L'Hospital.

Seien f, g differenzierbar nahe x_0 mit $g'(x) \neq 0$ überall, so dass die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ entweder beide gleich 0 oder beide ∞ sind.

Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls die rechte Seite im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert.

Dasselbe gilt für einseitige Grenzwerte und für $x \to \pm\infty$.

(6) Umkehrsatz: Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ (oder $f'(x) < 0$) $\forall x \in (a,b)$. Seien $c = \operatorname{Inf}(f)$, $d = \sup(f)$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Dann ist $f: (a,b) \to (c,d)$ ist bijektive und die Umkehr Funktion $f^{-1}: (c,d) \to (a,b)$ ist differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

(7) $\operatorname{Log}'(y) = 1/y \quad \forall y \in (0,\infty)$

(8) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ for $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

§ 5.3 Die Trigonometrischen Funktionen.

$z \in \mathbb{C}$

$z\bar{z} = |z|^2$

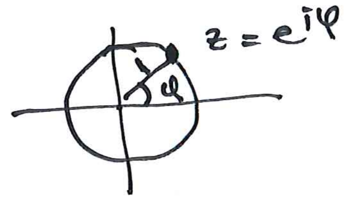
Wir haben $\operatorname{Exp}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definiert

auch $\operatorname{Cos}(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell}}{(2\ell)!}$

$\operatorname{Sin}(x) = \sum \frac{(-1)^\ell x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}$

Satz 5.3.1. (Euler) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\operatorname{Exp}(i\varphi)|^2 = \operatorname{Cos}^2\varphi + \operatorname{Sin}^2\varphi = 1.$$



und $\operatorname{Exp}(i\varphi) := \operatorname{Cos}\varphi + i \operatorname{Sin}\varphi$

$= \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

wobei $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ Real und bzw Imaginärteil der Zahl $z = e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und Polarwinkel φ bezeichnen.

Beweis: $\operatorname{Exp}(i\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$

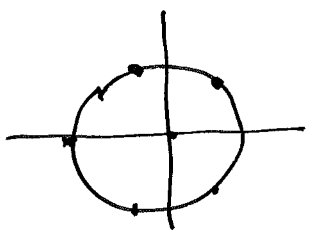
$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \varphi^{2\ell}}{(2\ell)!}}_{:= \cos\varphi} + i \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \varphi^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}}_{:= \sin\varphi}.$$

Da $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ gerade Funk. $\quad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ungerade Funk.

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$, gilt

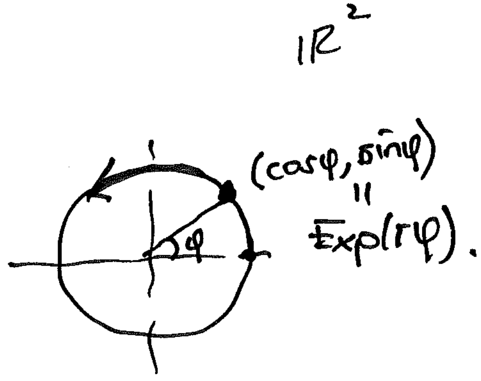
$$\overline{\operatorname{Exp}(i\varphi)} = \overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$
$$= \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \operatorname{Exp}(-i\varphi)$$

Also $\quad |\operatorname{Exp}(i\varphi)|^2 = \operatorname{Exp}(i\varphi)\,\overline{\operatorname{Exp}(i\varphi)} = \operatorname{Exp}(i\varphi)\operatorname{Exp}(-i\varphi)$
$$= \operatorname{Exp}(i\varphi - i\varphi) = \operatorname{Exp}(0) = 1.$$



$\operatorname{Exp}(i\varphi)$ liegt auf dem Kreis $|z|=1$.

$$\frac{d}{d\varphi} \operatorname{Exp}(i\varphi) = i \operatorname{Exp}(i\varphi).$$



$$\Longrightarrow \left\| \frac{d}{d\varphi} \operatorname{Exp}(i\varphi) \right\| = \|i\| \, \|\operatorname{Exp}(i\varphi)\| = 1.$$

d.h. die Kurve $\begin{array}{rl} T : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \\ \varphi & \longrightarrow \operatorname{Exp}(i\varphi) \end{array}$

durchläuft den Einheitskreis mit Geschwindigkeit 1.

Da $\operatorname{Exp}(0) = 1$, stimmt das Argument φ des Punktes $\operatorname{Exp}(i\varphi) \in \mathbb{C}$ überein mit dem Bogenlänge am Einheitskreis. Aber das ist genau wie die trigonometrische Funktionen definiert.

Bemerkungen. ① $\operatorname{Exp}(z+2\pi i) = \operatorname{Exp}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$

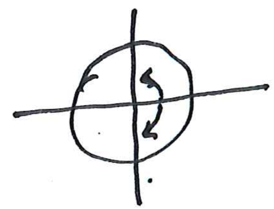
$$\| \quad \operatorname{Exp}(z)\underbrace{\operatorname{Exp}(2\pi i)}_{1.}$$

② $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

③ $|\operatorname{Exp}(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z)).$

④ $|\operatorname{Exp}(z)| = 1 \iff \operatorname{Re} z = 0 \iff z \in i\mathbb{R}.$

Arcus Funktionen (Umkehr Funktionen von trigon. Funktionen).



① $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

$\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1 \qquad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$\sin'(x) = \cos x > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

D.h. $\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow (-1,1)$ stetig, streng mon. wachsend.

und besitzt eine differenzierbare Umkehrfunktion.

$$\arcsin : (-1,1) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' \underset{\substack{\text{Umkehr}\\ \text{Satz}}}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{\left[\underbrace{\sin(\arcsin x)}_{x}\right]^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\boxed{\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

8.

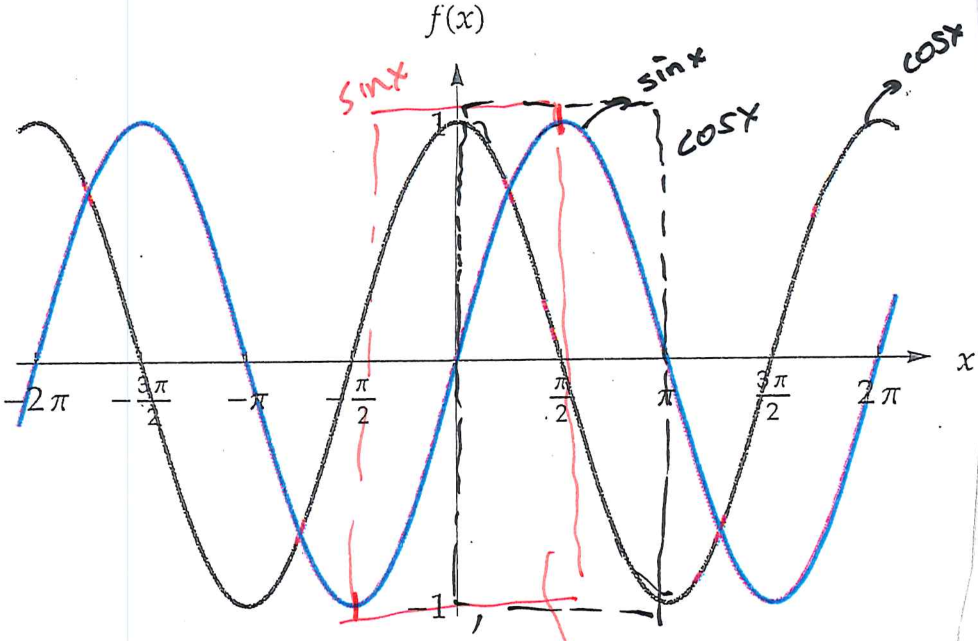
Analog kann man die Umkehr Funktion von cosinus berechnen.

$\cos : (0, \pi) \longrightarrow (-1, 1)$ bijektiv

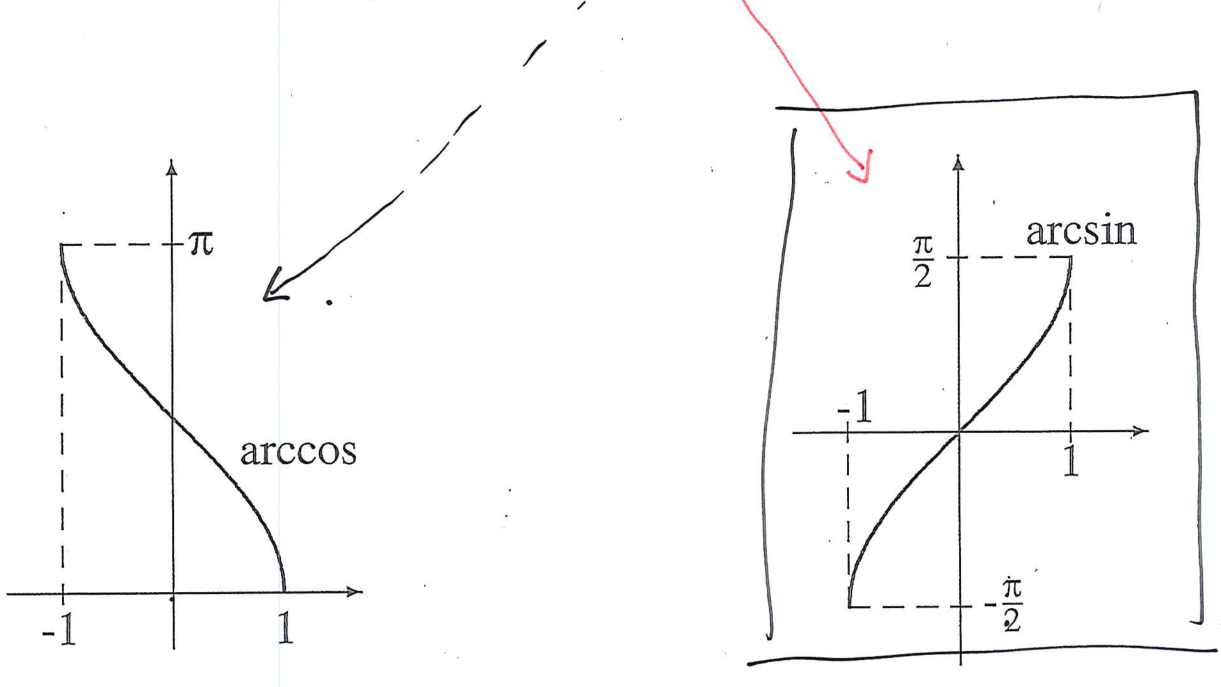
mit $\cos'(x) = \sin x > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$.

$\arccos : (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$



a Die 2π-periodischen Funktionen $\sin x$ (blau) und $\cos x$ (rot)



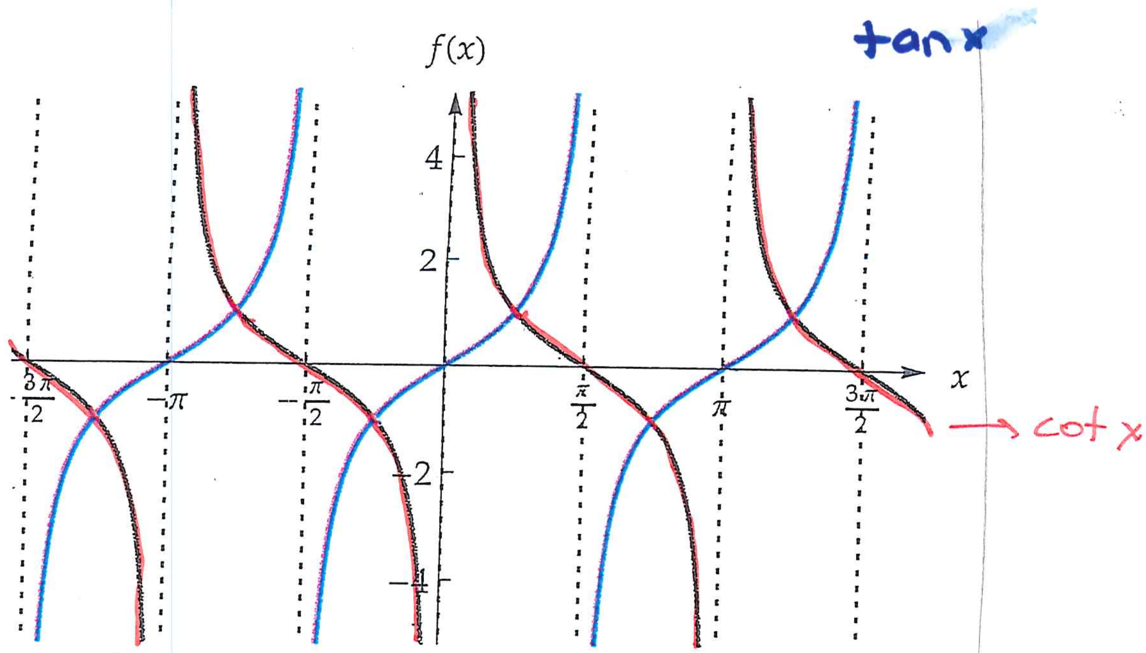
$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist umkehrbar und die

Umkehr Funktion

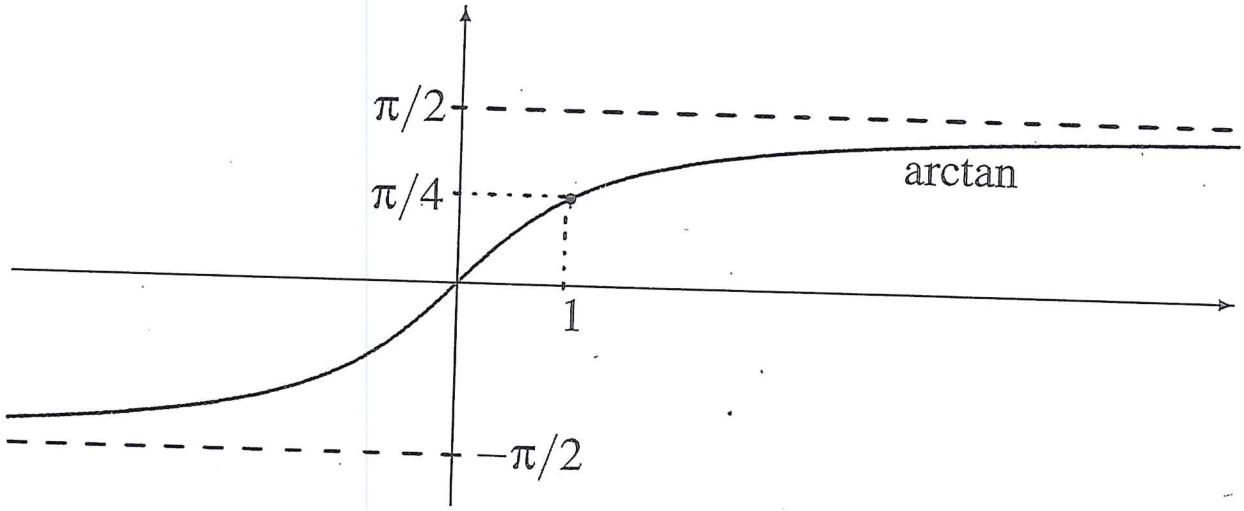
$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist differenzierbar

mit die Ableitung

$$\left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$



b Die π-periodischen Funktionen $\tan x$ (blau) und $\cot x$ (rot)



12

Mittels exp. funktion, kann man die Hyperbelfunktionen definieren

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to [1, \infty)$$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} : \mathbb{R} \to (-1, 1).$$

Diese funktionen erfüllen
$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$\operatorname{arcsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arccosh} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arctanh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}.$

$$(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arctanh})'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

§ 5.4. Funktionen der Klasse $C^1, C^2, \ldots$

Defn. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar

f heisst von der Klasse C^1

falls der Ableitungfunktion $x \to f'(x)$

stetig ist.

$$C^1(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \underset{f \text{ differenzierbar.}}{f}, f' \text{ stetig} \}.$$

Bsp. ① e^x, $\cos x$, $\sin x$, Polynome sind in C^1

Bsp. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \overset{?}{=} f(0) \checkmark$$

f stetig in $x=0$.

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2 \quad \text{als } x \to 0$$

$$-x^2 \to 0, \quad x^2 \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\cos\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

In $x=0$.

$$f'(0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h} - 0}{h}.$$

$$= \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0.$$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{-h} < \underbrace{h \sin\frac{1}{h}}_{\downarrow \atop 0.} < \underset{\downarrow \atop 0}{+h}$$

Also $f'(0) = 0$ und f ist differenzierbar in $x=0$.

Frage: Ist $f'(x)$ stetig?

Ant: Nein!

$$\left[\begin{array}{l} g \text{ ist stetig in } x = c \\ \Updownarrow \\ \forall (x_n) \text{ mit } \lim x_n = c \; ; \quad \lim g(x_n) = g(\lim x_n). \end{array}\right]$$

<u>Behauptung</u>: $f'(x)$ ist in $x=0$ nicht stetig!.

<u>Beweis</u>. Für $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $\lim x_n = 0$.

$$f'(x_n) = 2\,\frac{\sin n\pi}{n\pi} - \cos(n\pi) = -\cos n\pi = (-1)^{n+1}$$

Aber dann $\lim f'(x_n)$ existiert nicht!. Insbesondere $\neq f'(0)$

$\Rightarrow f'$ ist nicht stetig in $x=0$.

$\Rightarrow f$ ist nicht in C^1.

Übung. Sei $f(x) := \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ $k \geq 3$

f ist von der Klasse C^1.

Wir haben ein Konvergenz Begriff auf $C^0(\Omega)$ = stetige Funktion. gesehen:

Gleichmässige Konvergenz der Folgen von Funktionen.

Satz Sei f_n eine Folge auf Ω, stetige Funktionen.

$f_n \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} f$ (falls $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \to 0$).

Dann ist f auch stetig.

Frage: Falls $f_n \to f$ gleichmässig, f_n differenzierbar

Ist f auch differenzierbar?

Bsp. Sei $f_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + x^2}$ $\quad x \in (-1,1)$

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Behauptung: $f_n(x) \xrightarrow[\text{gleichmässig}]{} |x|$

Aber $f = |x|$ ist nicht differenzierbar ~~im~~ $x = 0$.

Satz 5.4.1 Sei f_n eine Folge in C^1 mit $f_n \xrightarrow[\text{gleich.}]{} f$ und $f_n' \xrightarrow[\text{gleich.}]{} g$ wobei f und $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$f \in C^1(\Omega)$ und $f' = g$.

Für Potenzreihen haben wir

Satz 5.4.2. Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ist innen Ihres Konvergenzkreises differenzierbar ist und

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k$$

d.h man erhält die Ableitung von f durch Gliedweises differenzieren,

Bsp. 1) $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$$(\exp(x))' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

(2) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ $\quad \underbrace{|x|<1}$

Daraus folgt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ $\quad \underbrace{|x|<1}$.

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} k\, x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

nicht triviale Identität,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, x^{k-2}$$

Defn 1) f heisst auf Ω m-mal differenzierbar falls f $(m-1)$-mal differenzierbar ist mit differenzierbarer $(m-1)$ten Ableitung $f^{(m-1)}$.

In diesem Fall

$$f^{(m)} = \frac{df^{(m-1)}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}\right) = \frac{d^m f}{dx^m}.$$

Es gilt für alle k, ℓ $\quad (f^{(k)})^{(\ell)} = f^{(k+\ell)}$

2) f ist von der Klasse C^m falls f m-mal differenzierbar ist und falls die Funktionen $f = f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(m)}$ stetig sind.

$C^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \in C^m \quad \forall m \}$.

<u>Bsp.</u> ① $\exp$, $\sin x$, $\cos x$ $\in C^\infty(\Omega)$.

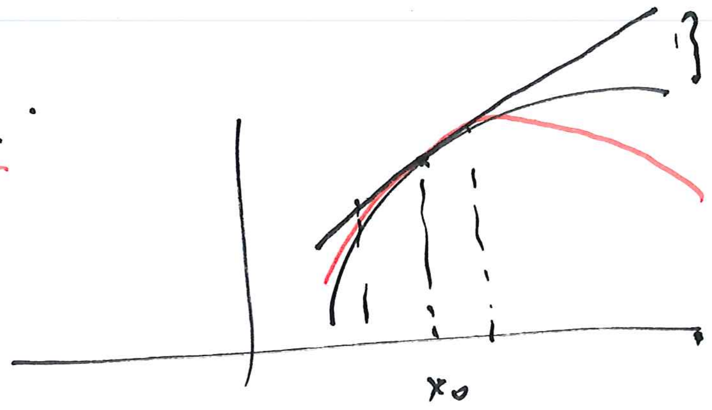
② ~~Ist~~ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $|x| < \rho$ ist

in $C^\infty((-\rho, \rho))$

§ 5.5. Taylor Formel.

Ausgangsfrage. Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

1. Antwort.



Ist f differenzierbar in x_0, so gilt

$$f(x) = \boxed{\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\substack{\text{Tangente} \\ \shortparallel \\ \text{Approximation}}}} + \underbrace{R_1(f, x, x_0)}_{\text{Fehler.}}$$

Tangente ist eine gute Approximation, da

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

$$\boxed{T_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$ ist ein Poly vom Grad 1.

Lineare Approximation.

<u>Frage</u> Gibt es ein Poly vom Grad 2 das für f in einer Umgebung von x_0 eine Gute Näherung liefert.

<u>2. Antwort</u>: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \boxed{\left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}\right]} + \underline{R_2(f, x; x_0)}.$$

Ist $T_2(x) = T_2(f, x_0, x) := \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}}$

eine Gute Approx?

$T_2(x)$ ist gut falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{R_2(f, x, x_0)}{(x-x_0)^2} = 0$

↓

heisst das Taylor Polynom 2-ter Ordnung für f.

Satz 5.5-1 (Taylor Formel).

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^m-Funktion. Dann gilt

$$f(x) = T_m(x; x_0) + R_m(x; x_0).$$

mit dem Taylor-Polynom

$$T_m(x) = T_m(x; x_0) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

und,

für den Restterm $R_m(x;x_0)$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_m(x;x_0)}{(x-x_0)^m} = 0 .$$

Ist f $m+1$ mal differenzierbar, so gilt

$$\boxed{f(x) = T_m(x) + \underbrace{f^{m+1}(c)\,\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}}_{R_m(f,x,x_0)}}$$

für ein $c \in [x_0, x]$

Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Restterm die Abschätzung

$$\left|R_m(f;x;x_0)\right| \leq \sup_{x_0<\xi<x} \left|f^{(m+1)}(\xi)\right| \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Taylorpolynome der Grade 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13