Die Trigonometrische Funktionen

$$\cos x = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell}}{(2\ell)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum \frac{(-1)^\ell x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x : (-1, 1) \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arccos x : (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$$

$$\arctan x : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Funktionen der Klasse C^n

$$C^n(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ m-mal differenzierbar und} \\ f, f^{(1)}, \dots, f^{(m)} \text{ sind stetig} \end{array} \right\}.$$

Bsp ① $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$ $\in C^m(\mathbb{R})$ $\forall m$ $\Rightarrow$ sie sind C^∞-Funk.
$\in C^\infty$

② Die Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $|x| < \rho$ ist in $C^\infty((-\rho, \rho))$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad |x| < \rho$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \quad |x| < \rho$$

$$\vdots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) a_k x^{k-m}, \quad |x| < \rho .$$

Man erhällt die Ableitung von f durch Gliedweises differenzieren.

Taylor Formel

(Taylor Satz – Taylor Formel)

Satz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^m-Funktion. Dann gilt

$$f(x) = T_m(x;x_0) + R_m(x;x_0), \quad \text{wobei}$$

$$T_m(x;x_0) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ ist der Taylor-Polynom vom Grad m.
x_0 = Entwicklungspunkt.

Für den Restterm $R_m(x;x_0) := f(x) - T_m(x;x_0)$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_m(x;x_0)}{(x-x_0)^m} = 0.$$

Falls f $m+1$-mal differenzierbar ist, so gilt

Taylor-Formel

$$\boxed{f(x) = T_m(x;x_0) + \boxed{f^{(m+1)}(c)\,\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}}}$$ für ein $c \in (x_0, x)$

Falls $f \in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt die Abschätzung

$$\boxed{|R_m(f,x,x_0)| \leq \sup_{x_0<\xi<x} |f^{m+1}(x)| \,\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}}$$

Abschätzung für den Restterm.

Bsp. 1) $f(x) = \exp(x)$, $x_0 = 0$

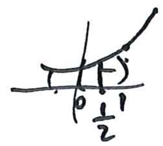
$$T_m(f; x_0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k. = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} x^k.$$

$$f'(x) = \exp(x)\Big|_{x=0} = 1$$
$$f''(x) = \exp(x)\Big|_{x=0} = 1$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = \exp(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^m}{m!}}_{T_m(x)} + R_m(x)$$

$$R_m(x) = \cancel{\exp(c)}\ \frac{f^{m+1}(c)}{(m+1)!} x^{m+1} \quad \text{für ein } c$$

$$R_m(x) = e^c \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}$$ für ein $c \in (0,1)$.



Fehlerabschätzung.

$$R_m(x) = \left| e^c \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \right| \leq \frac{e}{(m+1)!} \qquad c \in (0, \tfrac{1}{2})$$

Bsp für $m=5$ $\quad R_5(x) \leq \frac{e}{6!} \approx \underset{\sim}{0.0083}$.

sei $x = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{e} = e^{1/2} \cong 1 + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} + \cdots \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} \pm 0.0083$$

Taylorentwicklung der Sinusfunktion

Falls $x_0 = 0$, heisst Taylorformel ~~[illegible]~~ auch McLaurin formel.

$$f = \sin x \big|_{x=0} = 0 \qquad x_0 = 0$$

$$f' = \cos x \big|_{x=0} = 1$$

$$f'' = -\sin x \big|_{x=0} = 0$$

$$f''' = -\cos x \big|_{x=0} = -1$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow \sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + \underbrace{R_{2n+2}(x)}_{?}.$$

$$\left| R_{2n+2}(x;0) \right| = \left| \underbrace{(-1)^n \left(f^{2n+2}(c) \right)} \right| \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \right| \quad \text{für ein } c$$

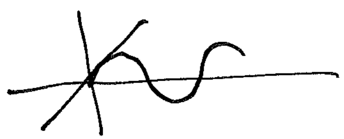
$$\left|R_{2n+2}(x)\right| \leq 1 \left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| .$$

Insbesondere.

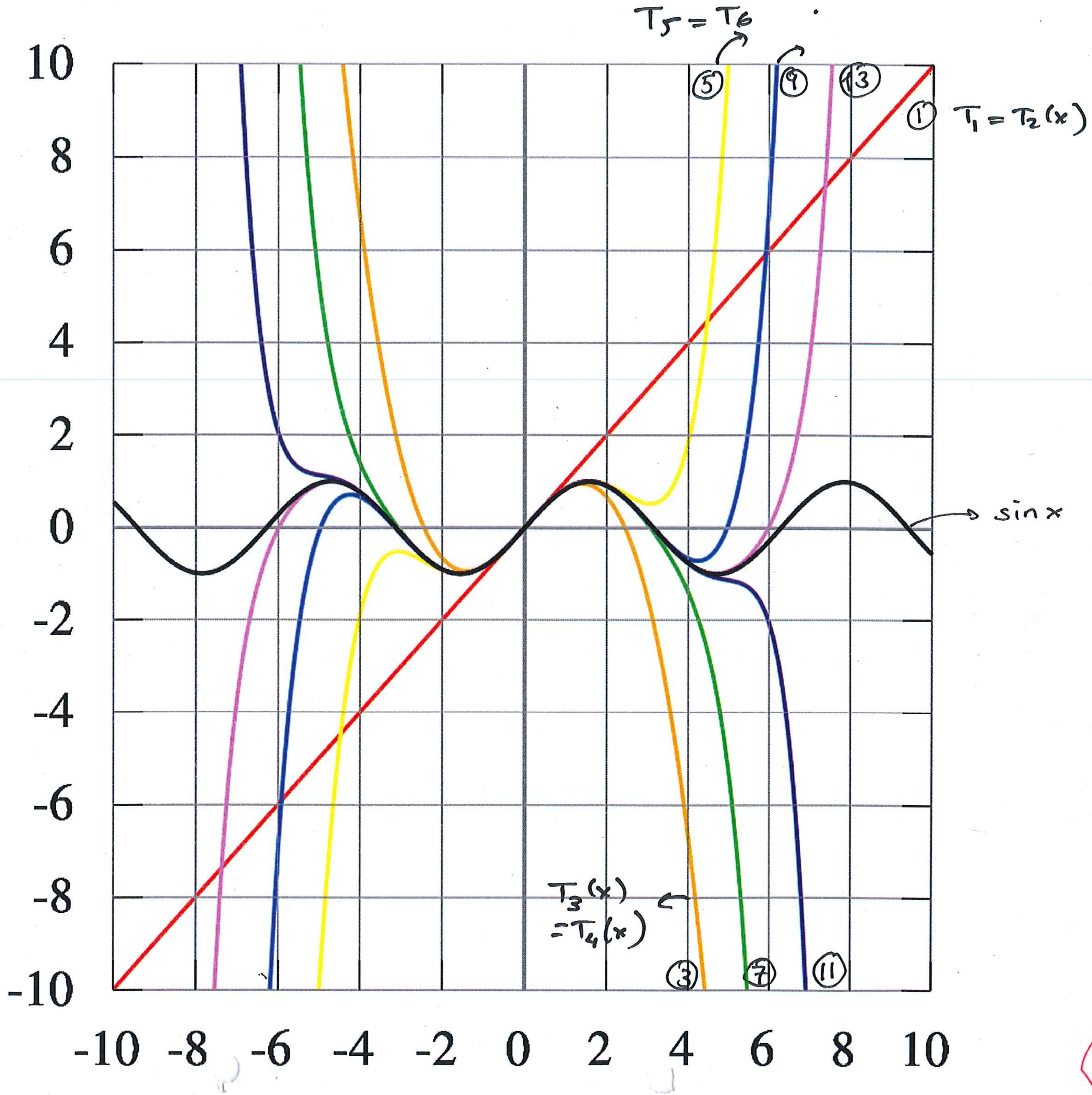
$$\Big|\underbrace{\sin x - x + \frac{x^3}{3!}}_{T_3}\Big| \leq \frac{|x^5|}{5!}$$

Für $|x|$ klein liefert diese eine gute Approximation.

$x = 0.1 = \frac{1}{10}$ $\qquad \Big|\sin\frac{1}{10} \underbrace{- \frac{1}{10} + \frac{1}{6000}}_{\underbrace{\frac{1}{10} - \frac{1}{6000}}_{\text{approximation}}}\Big| < \frac{1}{5!\,10^5} \ll$ klein.



Falls x klein ist, $\underline{\sin x \sim x}$.



$T_5 = T_6$
5
9
13
1
$T_1 = T_2(x)$
$\sin x$
$T_3(x)$
$= T_4(x)$
3
7
11
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10 -8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8 10

$7\frac{1}{2}$

Taylor Reihe. : Sei $f \in C^\infty$ eine C^∞-Funktion.

Defn Die **Taylorreihe** der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt x_0 ist die Potenz Reihe.

$$T_\infty(x;x_0) :\equiv T(x;x_0) := \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} f^k(x_0)\,\frac{(x-x_0)^k}{k!}}_{\text{Taylorreihe.}}$$

Bemerkungen. ~~Frage~~: ① Die Taylor-Reihe einer C^∞-Funktion f ist im **Allgemeinen nicht** konvergent.

Sie ist ein Potenzreihe mit Konvergenzkreis $|x-x_0|<\rho$.

(ρ kann 0, ∞, oder endlich sein).

Bsp 1 ~~e^x~~ Die Taylor reihe für $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sin x = \sum \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

$$\cos x = \sum (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}$$

$e^x, \sin x, \cos x$: die Taylorreihen konvergiert für $x \in \mathbb{R}$.

Bsp 2. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

f hat für jede $f^n(x)\big|_{x=0} = 0$.

Die Taylor reihe für $f(x)$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot \frac{x^k}{k!} = 0 \quad \forall x$.

Aber $f \not\equiv 0$.

Moral of the story: Falls die Taylorreihe konvergiert so konvergiert $T(x; x_0)$ nicht notwendigerweise gegen f.

(3) Falls jedoch $T(x; x_0)$ konvergiert gegen f (z.B. für e^x, $\sin x$, $\cos x$).

also
$$T(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} \underset{\text{'und'}}{=} f(x)$$

so nennt man die Funktion f **reell analytisch**.

(4) Kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 schon irgendwie (durch Benutzen bekannter Entwicklungen) als Potenzreihe in $x - x_0$ darstellen, so ist diese Potenzreihe automatisch gleich der Taylorreihe.

z.B. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x}$$

$$e^x = e^{x+x_0-x_0} = e^{x_0} \cdot \underbrace{e^{x-x_0}} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} e^{x_0} \frac{(x-x_0)^n}{n!}}$$

Bsp. Taylorreihen

① $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad \rho = \infty$, $\forall x$ konvergent

② $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\quad \forall x$

③ $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\quad \forall x$

④ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad |x|<1$

⑤ $\ln(1+x) \overset{\text{übung}}{=} \ldots$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad |x| \leq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \longrightarrow \ln 2$$

Bmk. $f(x) = \sin x$

$$T_{2n+1}(x) \overset{?}{=} T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{2n+2} \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!} \;\; < \;\; \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)\, x^k}{k!}$$

Der Unterschied: $\underbrace{f^{2n+2}(0)}_{0} \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$

$f = \sin x$

$f' = +\cos x$

$f'' = -\sin x \leftarrow$ $\qquad f^{(2n)}(x) = \pm \sin x$

$f''' = -\cos x$ $\qquad f^{(2n)}(0) = 0$

$f^{IV} = \sin x \leftarrow$

$\vdots$

Bsp. Taylorentwicklung für Polynome.

Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polyn.

$$T_n(f,0) = f = T_{n+1}(f,0) = T_{n+2}(f,0) \ldots$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

Für einen beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$

ist das Taylor Poly $T_n(x;x_0)$ n-ten Grades von f

um x_0 gegeben durch

$$T_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \equiv f(x)$$

Das Taylor Poly $T_n(x, x_0)$ stellt f in der Polynombasis $\{(x-x_0)^k\}_{k=0}^{n}$.

2B. $p(x) = x^3 + x + 1$, $x_0 = 1$

$$= 3 + 4(x-1) + 6\frac{(x-1)^2}{2!} + 6\frac{(x-1)^3}{3!} = 3 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

$p(1) = 3$

$p'(x) = 3x^2 + 1 \big|_{x=1} = 4$

$p''(x) = 6x \big|_{x=1} = 6$

$p'''(x) = 6 \big|_{x=1} = 6$

$p^{(4)}(x) = 0$.

Lokale Extrema.

Mittels Taylor Formel können wir lokale Extrema (Max oder Min) einer Funktion diskutieren.

Defn 5.6.1 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine $x_0 \in [a, b]$ heisst (strikte) lokale Minimalstelle von f falls es $r > 0$ gibt so dass $\forall\, x \in \underbrace{(x_0 - r, x_0 + r)}_{\text{in einer Umgebung von } x_0} = B_r(x_0)$

$$f(x_0) \leq f(x) \quad (\text{bzw } f(x_0) < f(x)) \quad \cancel{\forall x \in B_r(}$$

Analog: lokale Maximalstelle (strikt)

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) > f(x)) \qquad \forall\, x \in B_r(x_0),$$

Bmk: Wir haben schon gesehen dass falls f an stelle x_0 differenzierbar ist und x_0 ein extremal stelle ist, dann gilt $f'(x_0)=0$.

d.h <u>$f'(x_0)=0$ ist eine Notwendige Bedingung für eine Ext. stelle in x_0.</u>

Für eine hinreichenden Kriterium haben wir . . .

Satz: Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^2-funktion mit $f'(x_0)=0$ für ein $x_0 \in (a,b)$.

1) Falls $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein strikt lok. Minimum.

2) Falls $f''(x_0) < 0$, dann " " " " " Maximum.

Beweis: (Idee) 1) Mit Taylor Formel um $x = x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + f''(c)\frac{(x-x_0)^2}{2!} \quad \text{für ein } c \in (x_0, x)$$

Da $f'(x_0) = 0$ ist,

$$f(x) = f(x_0) + f''(c)\frac{(x-x_0)^2}{2!}, \quad c \in (x, x_0)$$

Da f'' stetig ist, und $f''(x_0) > 0$, f'' ist in einer Umgebung von x_0 auch positive.

In diesem fall $\frac{f''(c)(x-x_0)^2}{2!} > 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, $c \in (x_0, x) \in (x_0 - r, x_0 + r)$

und somit $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

(x)

Problem : Was Passiert im Fall $f''(x_0) = 0$ (und $f'(x_0)=0$).

Hier gibt es zwei Möglichkeiten

- die kritische Punkt x_0 ist ein strikt lok. Ext.
- " " " ist kein Extreme.

Eine solche punkt heisst 'Sattelpunkt"

Im Allgemein haben wir

Kor 5.5-1 Sei $f \in C^m$-Funktion, $x_0 \in [a,b]$

mit $f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \dots = f^{m-1}(x_0) = 0$.

1) Falls $m = 2k+1$ und x_0 lok. min stelle (oder max stelle)
dann gilt $f^m(x_0) = 0$.

2) i) Falls $m = 2k$ und $f^m(x_0) > 0$, dann hat f in x_0
ein strikt lok. min.

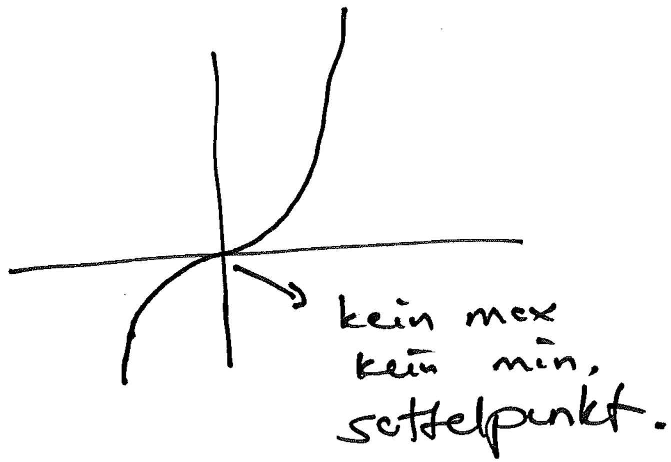
ii) Falls $m = 2k$ und $f^m(x_0) < 0$, dann hat f in x_0
— — - - - - - max

Bsp. $f(x) = ax^m$ (oder $a(x-x_0)^m + b$)

1) $m=3$ $\quad f'(0) = 0$

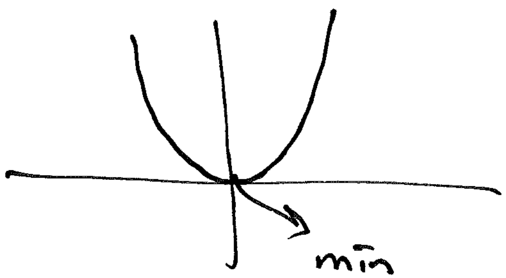
$f(x)=ax^3$ $\quad f''(0) = 0$

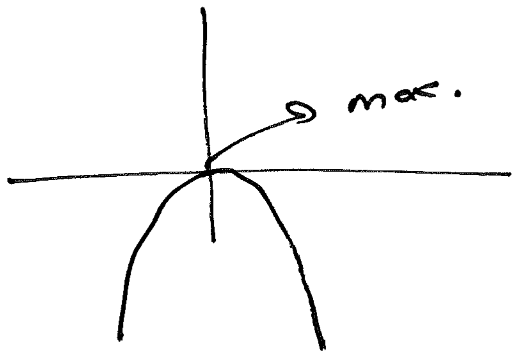
$f'''(0) = a \neq 0,$



2) $m=2$ $\quad f(x)=ax^2$

$f'(0)=0 \quad , \quad f''(0) = a \neq 0 \quad \begin{cases} a>0 & \text{Fall 2(I)} \\ a<0 & \text{Fall (2II)} \end{cases}$





Bmk: Falls $f'(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, dann ist x_0 keine Extremalstelle.

Bsp. $f(x) = x^4 - x^3 \qquad f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}.$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2[4x-3] = 0 \implies x = 0,\ x = \frac{3}{4}$ sind kritische Stellen.

$f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1).$

$f^{3}(x) = 24x - 6$

$f^{(4)}(x) = 24$

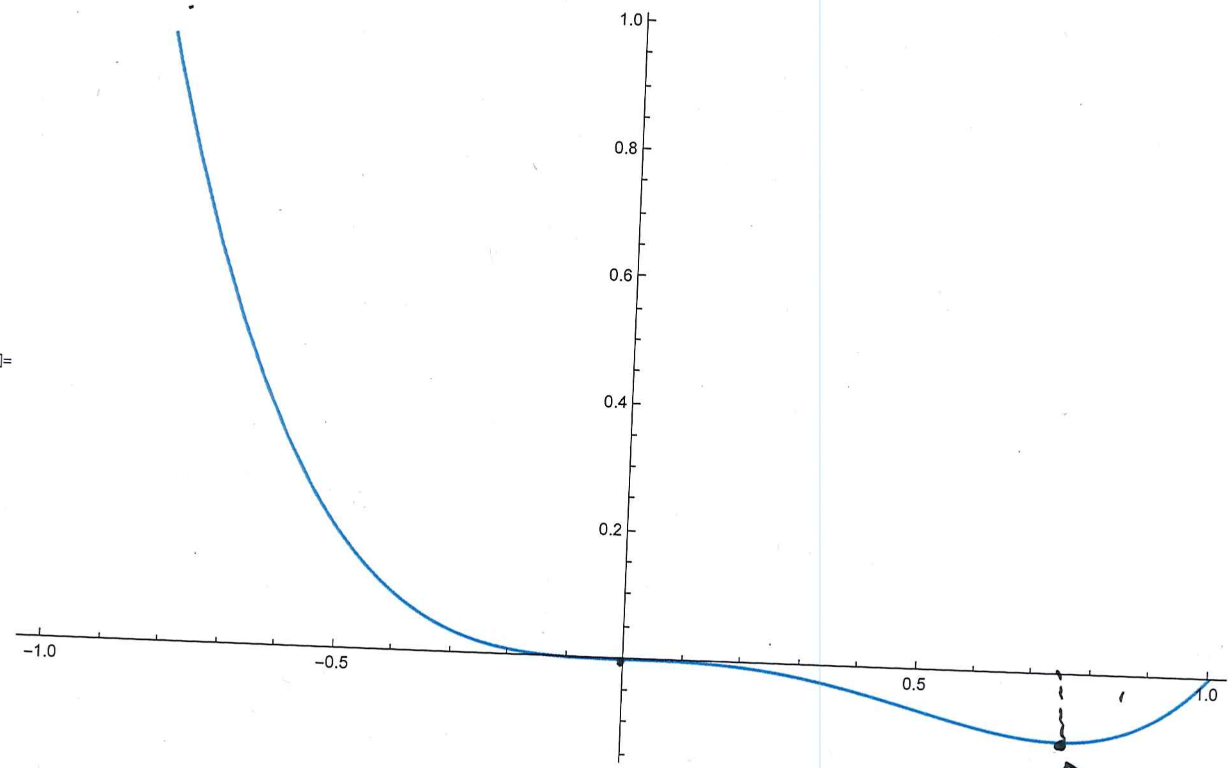
$f^{(5)}(x) = 0.$

$\boxed{x=0}$ $\left.\begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \\ f'''(0) = -6 \neq 0 \end{array}\right\}$ 0 ist kein ext. stelle

$\boxed{x=3/4}$ $\left.\begin{array}{l} f'(3/4) = 0. \\ f''(3/4) > 0. \end{array}\right\}$ $x_0 = 3/4$ ist ein lok. min.

In[1]:= `Plot[x^4 - x^3, {x, -1, 1}]`

Out[1]=



lok. min.
||
glob. min in $[-1,1]$.

$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left[\frac{3}{4} - 1\right]$

$= \frac{27}{4^4}.$

max ist $f(-1) = 1$

20

Konvexität und Konkoutät.

Defn Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst

- **konvex** falls für alle $x_0, x_1 \in (a,b)$, $0 \leq t \leq 1$ gilt

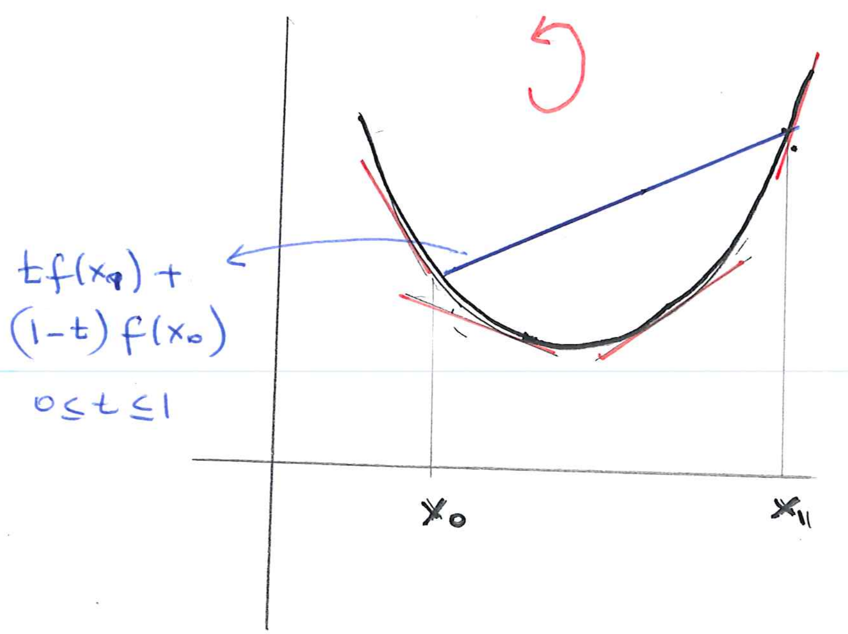
$$\boxed{f(t x_1 + (1-t)x_0) \leq t\, f(x_1) + (1-t) f(x_0).}$$

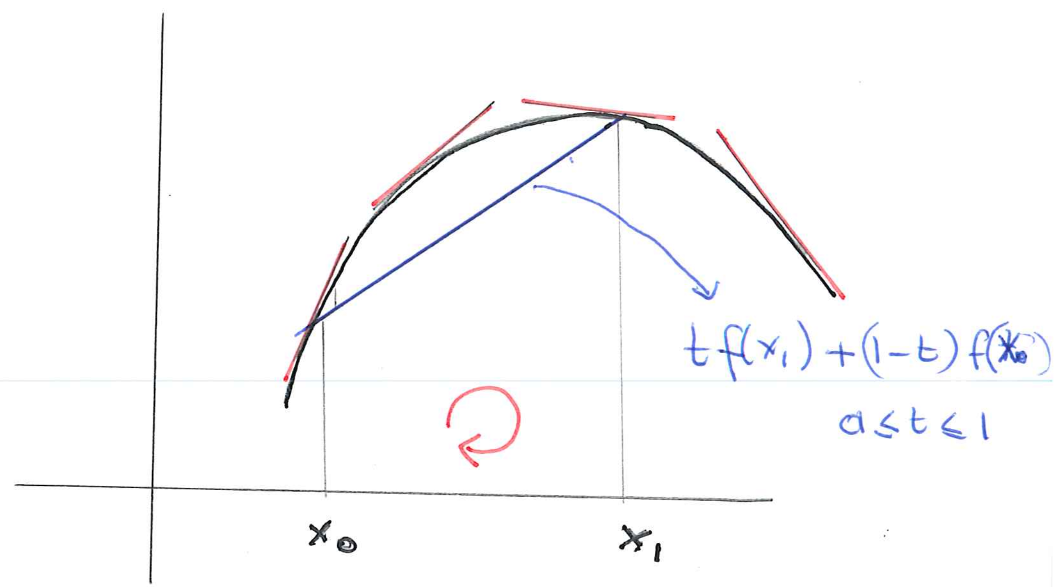
- **strikt konvex** — — — $<$ — — —
- **konkav** — — — $\geq$ — — —
- **strikt konkav** — — — $>$ — — — .

__Anders gesagt__: Die Funktion f heisst __konvex__, falls ihr Graph auf jedem Teilintervall unterhalb der jeweiligen Sekante liegt. d.h. falls für alle Punkte $x_0 < x < x_1$ im Intervall $[x_0, x_1]$ gilt

$$f(x) \leq \underbrace{f(x_0) + \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)}_{\text{Sekante.}}$$

Krümmung = Konvex oder Konkav





- f ist Konvex
- Die Steigung der Tangente nimmt zu
- Die Tangente dreht sich im positiven Drehsinn
- Linkskrümmung
- $f''(x) > 0$

- f ist Konkav
- Die Steigung der Tangente nimmt ab
- Die Tangente dreht sich im negativen Drehsinn
- Rechtskrümmung
- $f''(x) < 0$

Satz 5.5.2. Sei $f \in C^2[a,b]$

1) Falls $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dann ist f konvex

2) Fall $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dann ist f konkav.