Satz (Taylor Formel) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine C^m-Funktion. $x_0 \in [a,b]$

Dann gilt

$$f(x) = T_m(x;x_0) + R_m(x;x_0) \quad \text{wobei}$$

$$T_m(x;x_0) := \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ ist der Taylor Polynom vom Grad m

und für den Restterm $R_m(x;x_0) := f(x) - T_m(x;x_0)$ gilt $\lim_{x \to x_0} \frac{R_m(x;x_0)}{(x-x_0)^m} = 0$

Falls f $(m+1)$-mal differenzierbar ist, so gilt

$$\boxed{f(x) = T_m(x;x_0) + \frac{f^{m+1}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} \quad \text{für ein } c \in (x_0,x)}$$

$$f \in C^{m+1}[a,b] \Rightarrow |R_m(f,x,x_0)| \leq \sup_{x_0 < \xi < x} f^{m+1}(\xi) \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Taylorreihe Sei $f \in C^\infty([a,b])$.

Die Taylorreihe der Funktion $f(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 \in [a,b]$ ist die Potenzreihe

$$T(x; x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Bsp.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \forall x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad |x| \leq 1$$

Extremwerte und Ableitung

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ wächst streng monoton in der Nähe von x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ fällt " " " " " "

x_0 ist eine lokale Extremstelle von $f \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Notwendige Bedingung für Extrema Sei f differenzierbar auf offene Intervall (a,b).

f hat an einer inneren Stelle $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Auf der Suche nach Extrema ... einer stetigen Funktion f auf einem abgeschlossenen intervall $[a,b]$

1) Bestimme alle kritischen stellen von f in (a,b), d.h die Stellen x_0, mit $f'(x_0)=0$, oder wo f nicht differenzierbar ist

2) Vergleiche die Werte von f an jeder kritischen Stelle x_0 und an den Randstellen a und b.

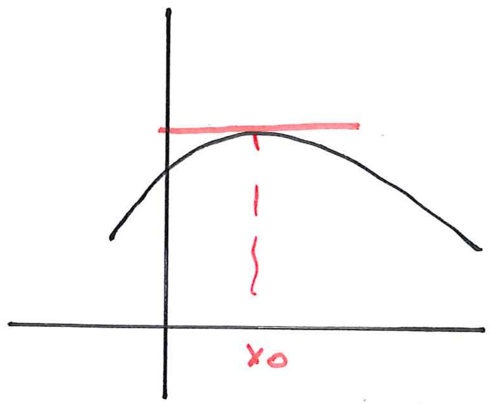
Also sind die

$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ innere Stellen wo } f'(x_0)=0 \\ \bullet \text{ innere Stellen wo } f \text{ nicht diff. ist} \\ \bullet \text{ Randstellen} \end{array}}$

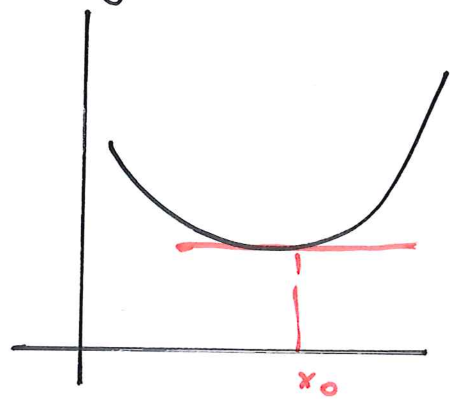
Kandidaten für Extremstellen.

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema ...

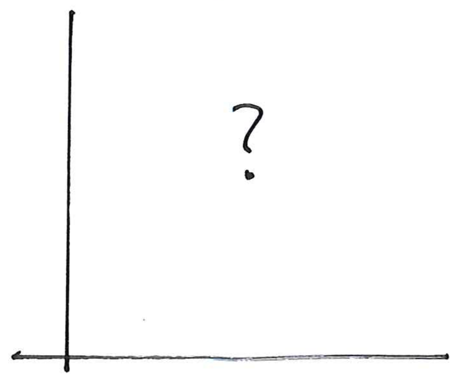
... einer zweimal differenzierbaren Funktion f



$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$
$\Rightarrow f$ hat ein lok. Max. bei x_0

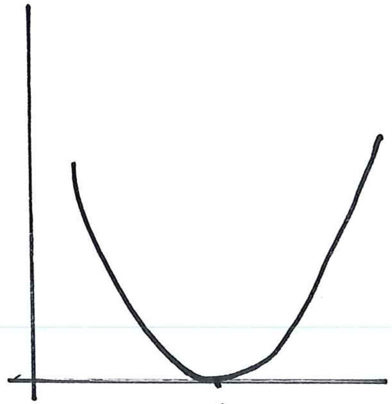


$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$
$\Rightarrow f$ hat ein lok min. bei x_0.



$f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$
$\Rightarrow$ kein info

$f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)=0$.



$f=(x-1)^4$

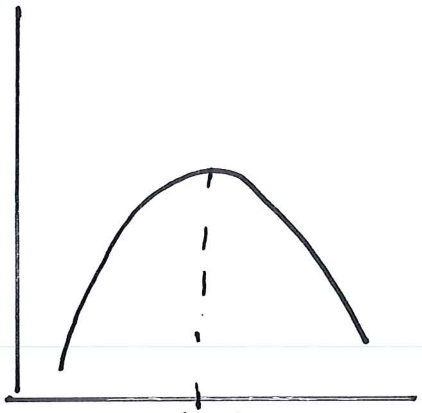
$f'(1)=0$

$f''(1)=0$

$f'''(1)=0$

$f^{IV}(1)>0$

f hat lok. min an der stelle $x_0=1$.



$f=-(x-1)^4+1$

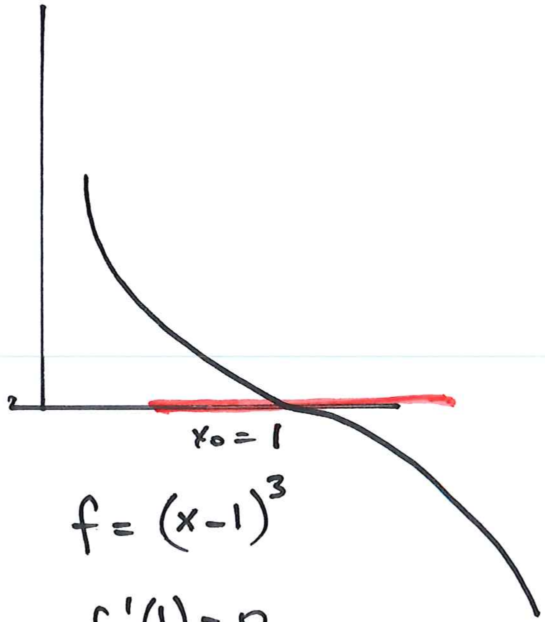
$f'(1)=0$

$f''(1)=0$

$f'''(1)=0$

$f^{IV}(1)<0$

f hat lok. max an der stelle $x_0=1$



$f=(x-1)^3$

$f'(1)=0$

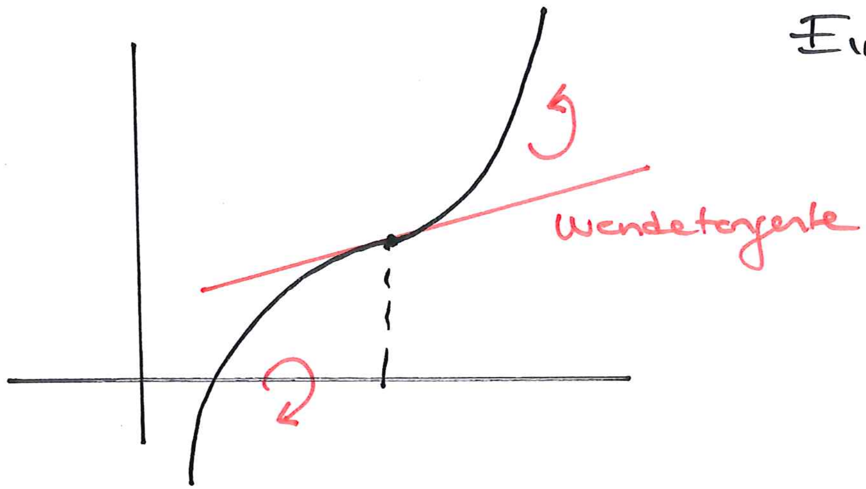
$f''(1)=0$

$f'''(1)\neq 0$

f hat ein Sattelpunkt in $x_0=1$.

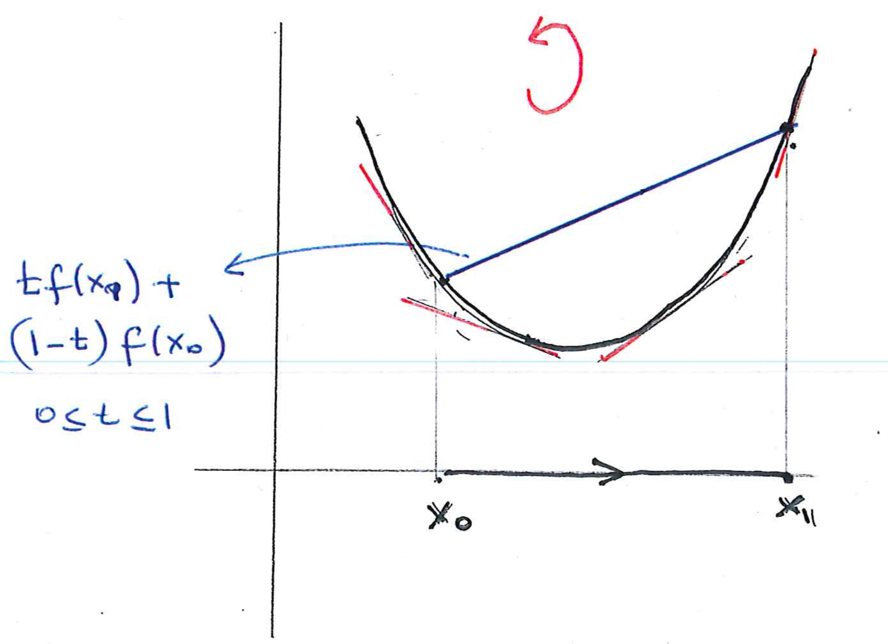
Defn 1) Ein Sattelpunkt (oder Horizontalwendepunkt) ist ein Graphenpunkt $(x_0, f(x_0))$ wo $f'(x_0)=0$, aber kein lokales Extremum ist

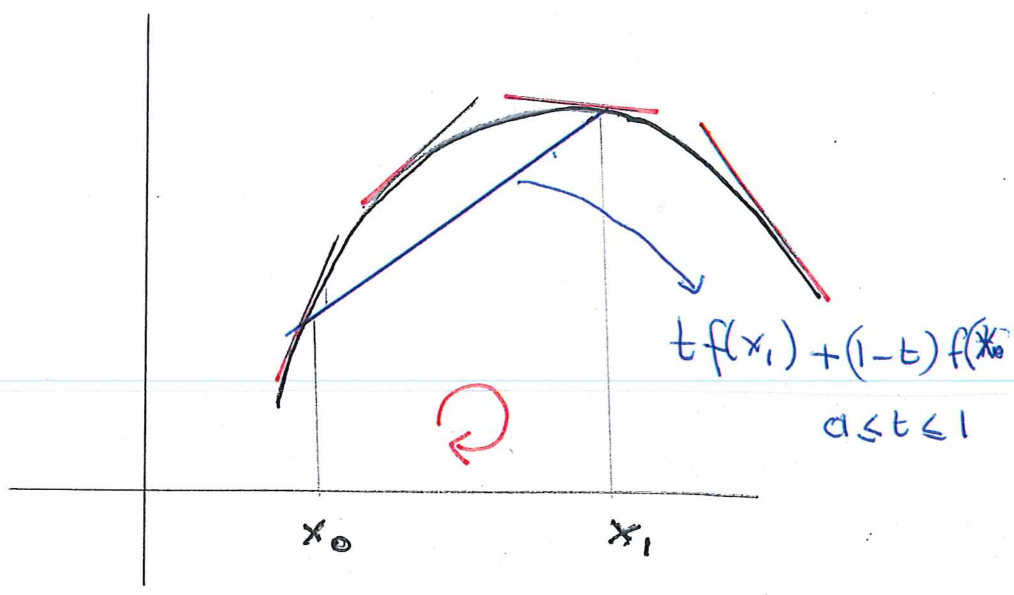
2) Ein Wendepunkt ist ein Graphenpunkt, wo der Drehsinn der Tangente sich ändert.



Eine Wendetangente ist die Tangente an einem Wendepunkt

Krümmung = Konvex oder Konkav





- f ist Konvex
- Die Steigung der Tangente nimmt zu
- Die Tangente dreht sich im positiven Drehsinn
- Linkskrümmung
- $f''(x) > 0$

- f ist Konkav
- Die Steigung der Tangente nimmt ab
- Die Tangente dreht sich im negativen Drehsinn
- Rechtskrümmung
- $f''(x) < 0$

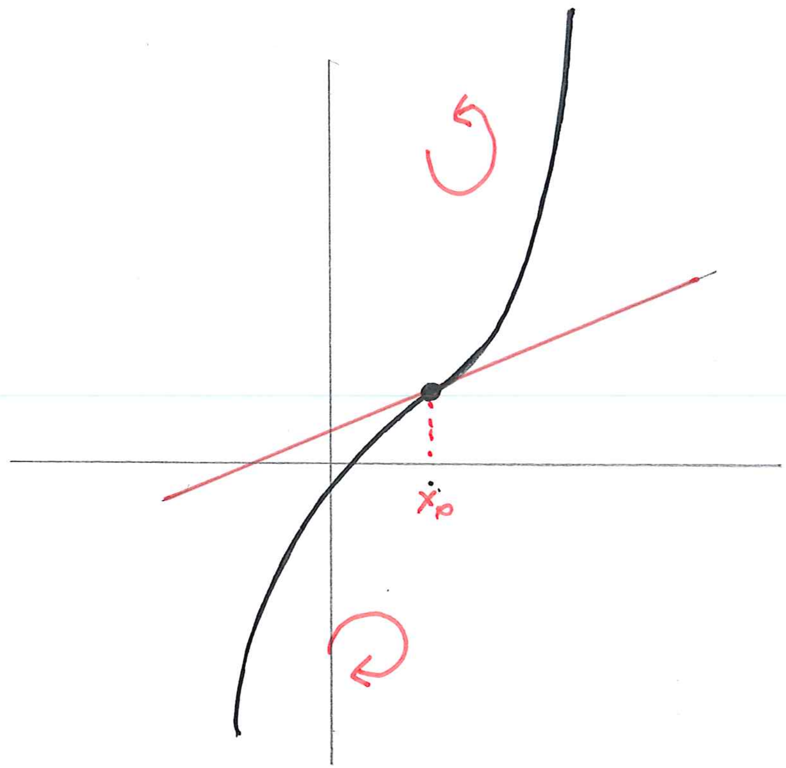
Satz 5.5.2. Sei $f \in C^2[a,b]$

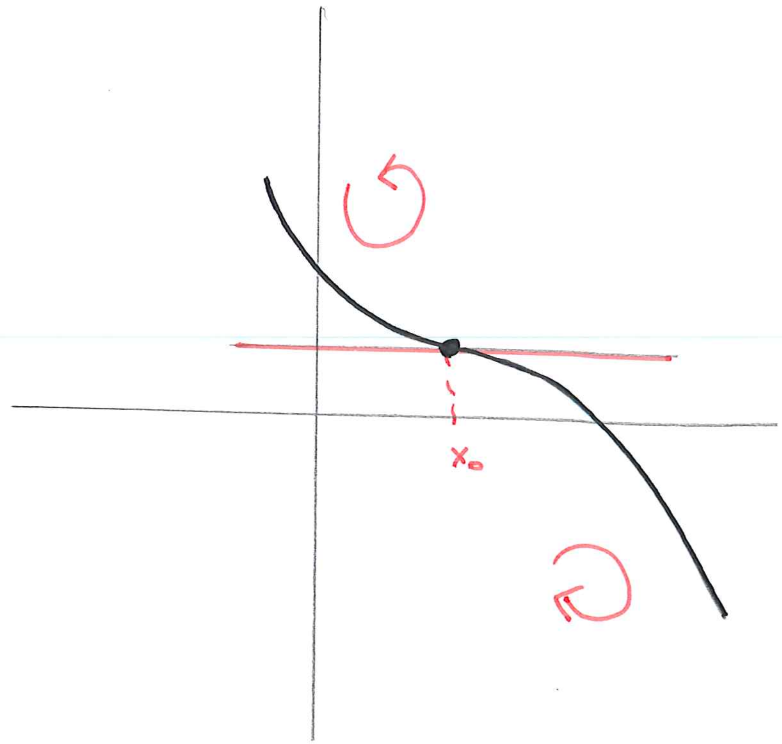
1) Falls $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dann ist f konvex

2) Fall $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Dann ist f konkav.





Wendepunkt

$f''(x_0) = 0$

$f'(x_0) \neq 0$

(x_0 ist kein Ext. stelle)

Sattelpunkt

$f''(x_0) = 0$

$f'(x_0) = 0$

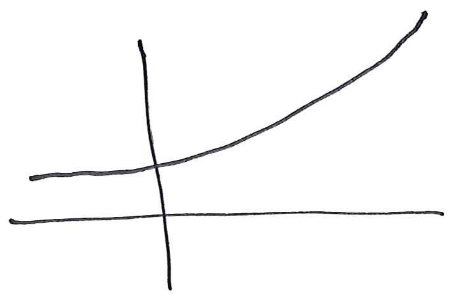
(x_0 ist kein Extremalstelle)

Defn. Ein **Wendepunkt** ist ein Graphenpunkt wo der Drehsinn der Tangente sich ändert.

Ein **Sattelpunkt** ist ein Wendepunkt mit horizontale Tangente.

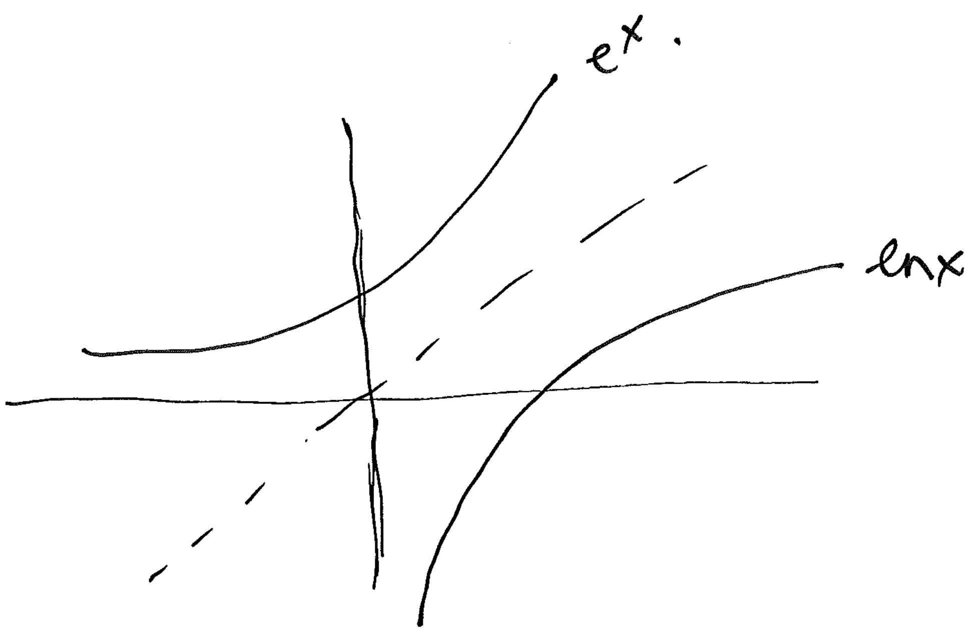
Bsp. ① **exp.** **Funktion** ist konvex.

$f(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x$



2) $f(x) = \ln x \qquad x > 0$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \implies \ln x$ ist konkav.



f konvex $\iff f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$.

Was passiert für eine konvex funktion wenn wir mehr als zwei Punkte betrachten?

Satz 5.5.3 (Jensen). Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex.
Dann gilt für beliebige Punkte $x_1, x_2, .., x_N \in (a,b)$
und Zahlen $0 \le t_1, t_2, .., t_N \le 1$ mit $\sum_{i=1}^{N} t_i = 1$

die Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} t_i x_i \right) \le \sum_{i=1}^{N} t f(x_i)$$

$N=2$ $\quad t_1 = t$, $t_2 = 1-t$

$$f(x_1 t + (1-t) x_0) \le t f(x_1) + (1-t) f(x_0).$$

Kor Vergleich von Arithmetischen und Geometrischen Mittel.

Für alle $0 < x_1, x_2 .. x_N < \infty$ und

$0 \le \alpha_1, .., \alpha_N \le 1$ mit $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

gilt
$$\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \le \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$$

Insbesondere erhalten wir für $\alpha_i = 1/N$

$$\underbrace{\left(\prod_{i=1}^{N} x_i\right)^{1/N}}_{\text{geom. Mittel}} \leq \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}_{\text{Arithm Mittel.}}$$

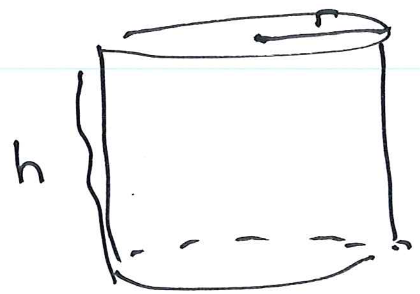
Beweis Sei $f(x) = e^x$. e^x ist Konvex.

Nun schreiben wir

$$\boxed{\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^{N} \exp(\alpha_i \ln x_i) = \exp \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln x_i = f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ln x_i\right)$$

$$\underset{\text{Jensen's Ungleichung.}}{\leq} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(\ln x_i) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \exp(\ln x_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i}$$

Bsp. Wie wählt man Höhe und Durchmesser einer Konservendose, so dass bei festem Volumen V möglichst wenig Blech verbraucht wird?



Sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Konservendose.

Dann gilt für die Oberfläche

$$f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

Ziel: Minimiere f unter Variation von r und h unter der Nebenbedingung $V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$

Minimiere somit $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

$r \in (0, \infty)$

Für die Minimum ist die Notwendige Bedingung

ist $f'(r) = 0$

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \implies \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0$$

$$\implies 4\pi r^3 - 2V = 0$$

$$\implies \underline{r_0 = \left(\frac{2V}{4\pi}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}.$$

Dann gilt für $h = \frac{V}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2 r_0$.

Warum ist r_0 ein min. Stelle?

$$f''(r_0) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}\Big|_{r=r_0} > 0. \implies \underline{r_0} \text{ ist ein lok. min. Stelle.}$$

$$\lim_{r\to 0} f(r) = \lim 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} = \infty. \quad \lim_{r\to\infty} f(r) = \infty.$$

Bsp. $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$.

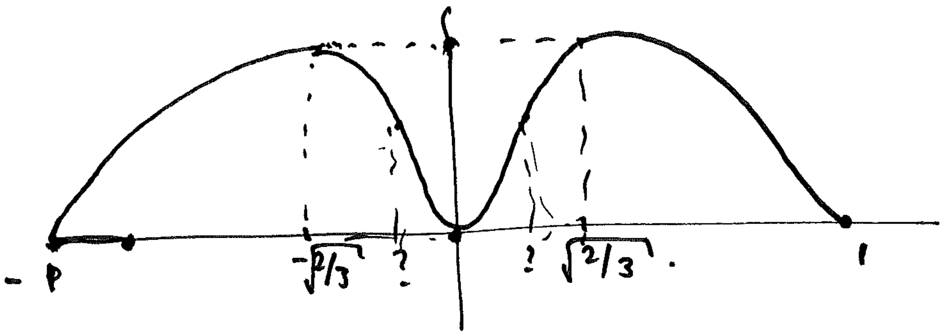
$$f'(x) = 2x\sqrt{1-x^2} + x^2\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-1/2}\cdot(-\cancel{2}x)$$

$$2x\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x(1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x-3x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x(2-3x^2) = 0 \Rightarrow x \in \left\{0, \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right\}.$$

x	-1		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{2}/\sqrt{3}$		1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	



$f = x^2\sqrt{1-x^2}$.

$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}$.

$$f''(x) = \frac{(2-9x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\cancel{2}}(2x-3x^3)(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-\cancel{2}x).$$

$$= \frac{2-9x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x^2-3x^4}{(1-x^2)^{3/2}}. = \frac{(2-9x^2)(1-x^2)+(2x^2-3x^4)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2 - \cancel{2x^2} - 9x^2 + 9x^4 + \cancel{2x^2} - 3x^4 = 0.$$

$$2 - 9x^2 + 6x^4 = 0. \qquad t = x^2$$

$$2 - 9t + 6t^2 = 0 \Rightarrow t = \cdots\cdots \Rightarrow \sqrt{t} = x\ldots$$

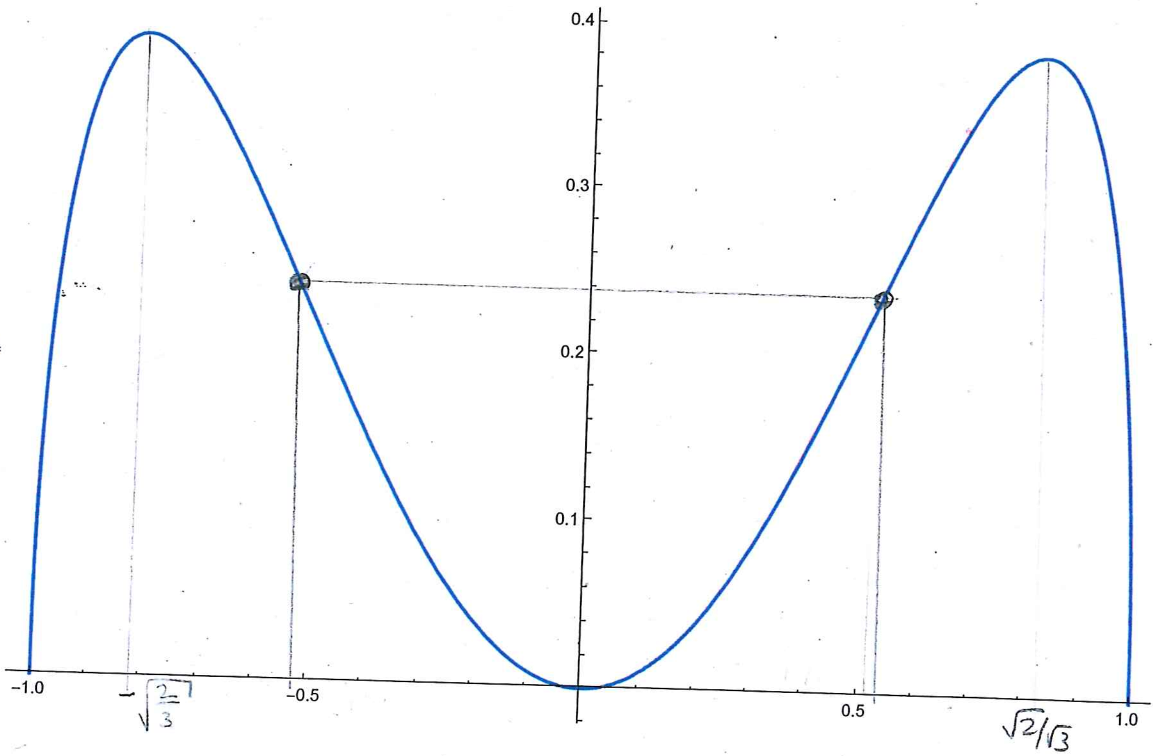
$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-48}}{12}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}, \quad x_{1,2} \cong \pm 0.52$$

(Beachte dass $\frac{9+\sqrt{33}}{12} > 1$.)

	-1		$-\sqrt{2/3}$		-0.52		0		0.52		$\sqrt{2/3}$		1
f'	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
f''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f		$\nearrow \cap$		$\searrow \cap$		$\searrow \cup$		$\nearrow \cup$		$\nearrow \cap$		$\searrow \cap$	

In[1]:= `Plot[x^2 Sqrt[1 - x^2], {x, -1, 1}]`

Out[1]=

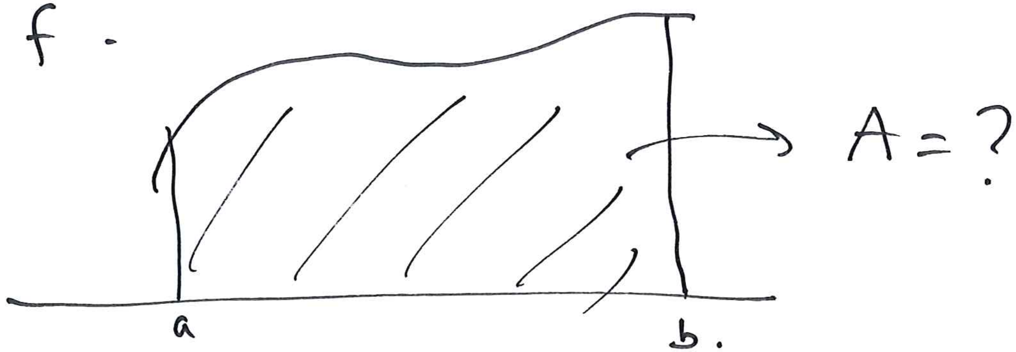


§6. Integration.

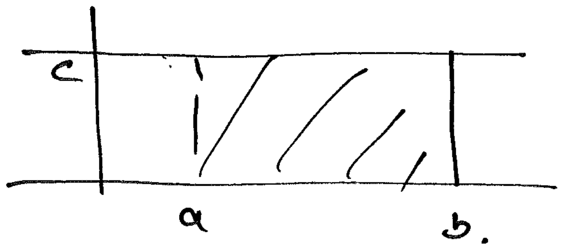
§6.0. Motivation.

(1). Sei $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ eine stetige nicht negative Funktion.

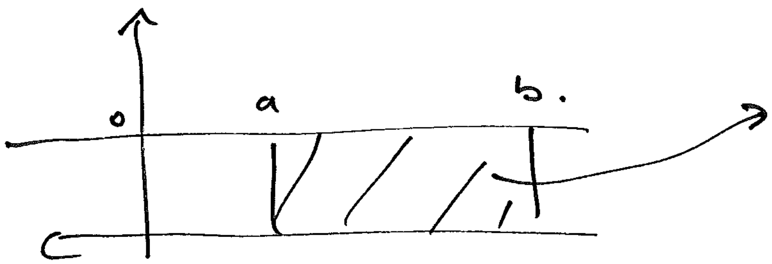
Gesucht ist eine Definition des Flächeninhalts A des Gebietes zwischen der x-Achse und dem Graph von f.



Dies ist einfach, wenn die Funktion f überall den konstanten Wert $f(x) = c$ hat

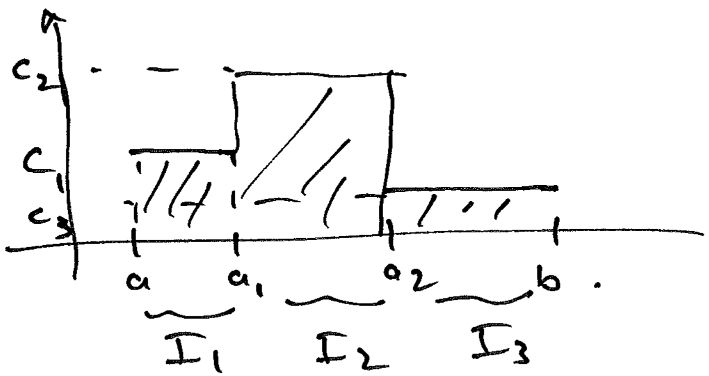


In diesem Fall die Fläche $c(b-a)$



$c(b-a) < 0$.

Treppenfunktionen.



$$A = c_1(a_1 - a) + c_2(a_2 - a_1) + c_3(b - a_2).$$

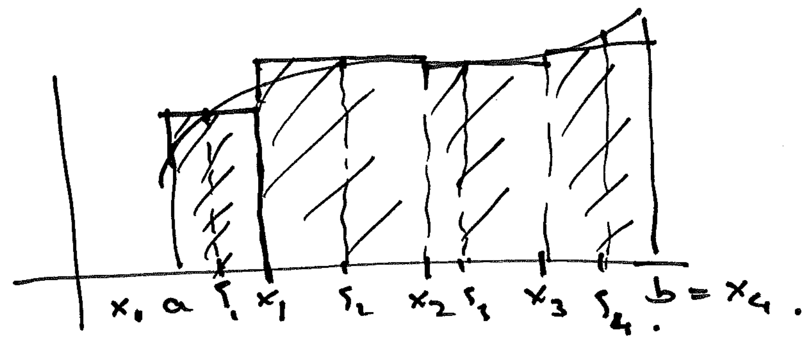
$$f = \sum_{k=1}^{3} c_k \chi_{I_k} \quad \text{wobei} \quad \chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1 & x \in I_k \\ 0 & x \notin I_k . \end{cases}$$

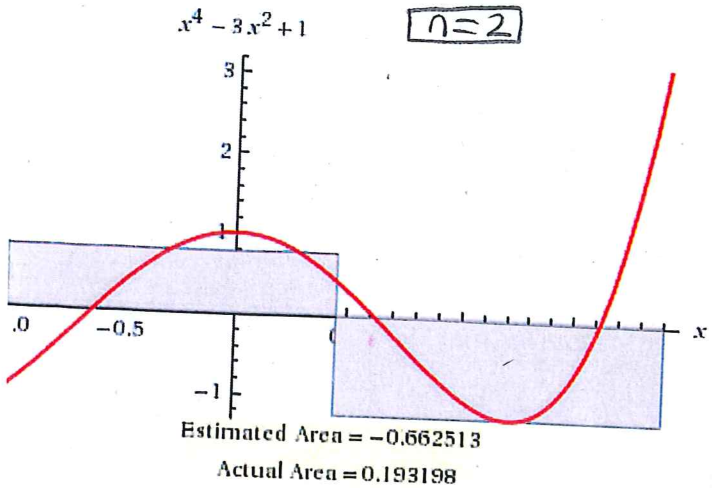
Für allgemeine beschränkte Funktion kann man nun wie folgt vorgehen.

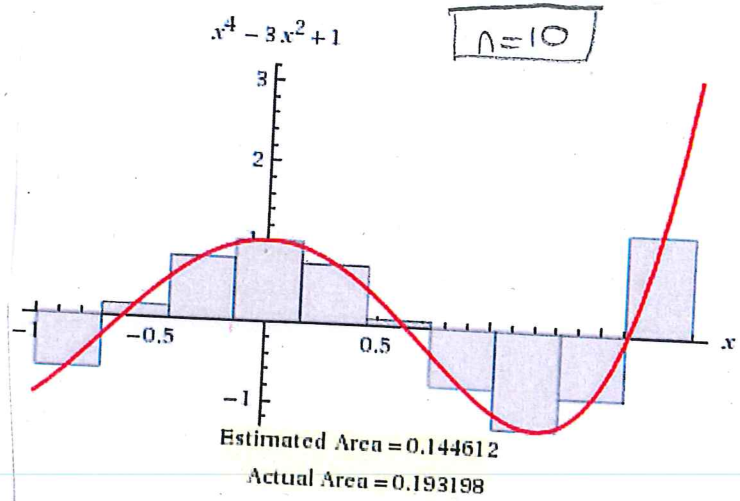
Zerlege das Interval $[a,b]$ in kleine Teilintervalle $I_1, \dots, I_n$ $\quad I_k = [x_{k-1}, x_k]$

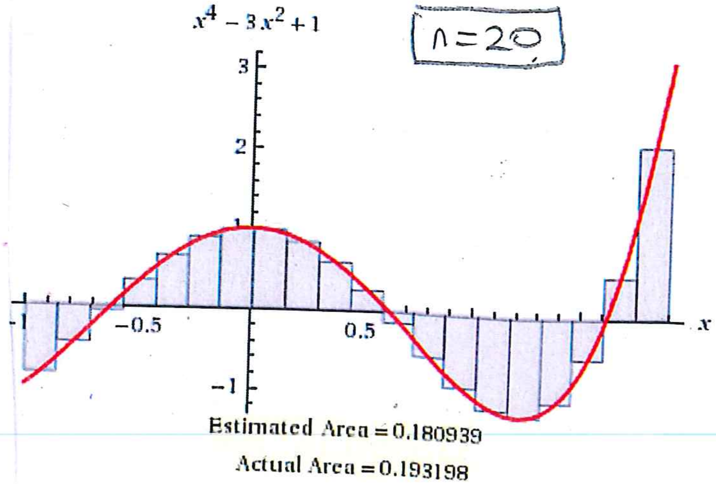
Wähle in jedem Teilinterval I_k einen Punkt ξ_k aus.

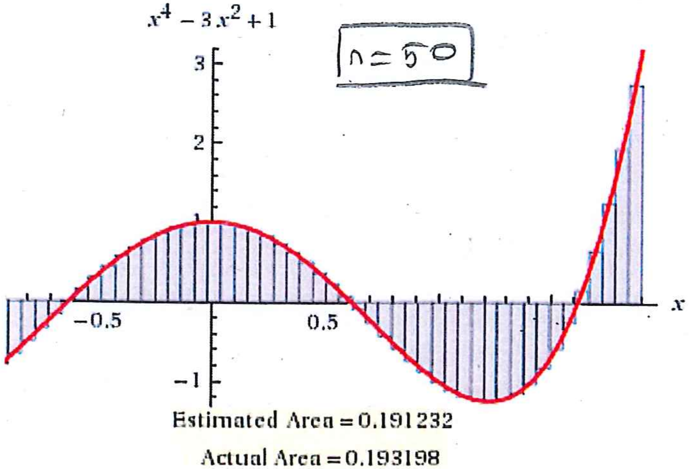
z.B Man kann ξ_k so wählen dass $f(\xi_k)$ max oder min von f in I_k sind.

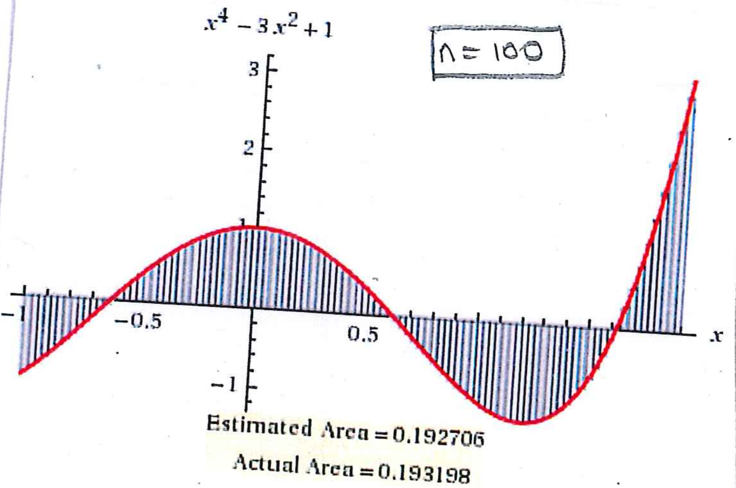


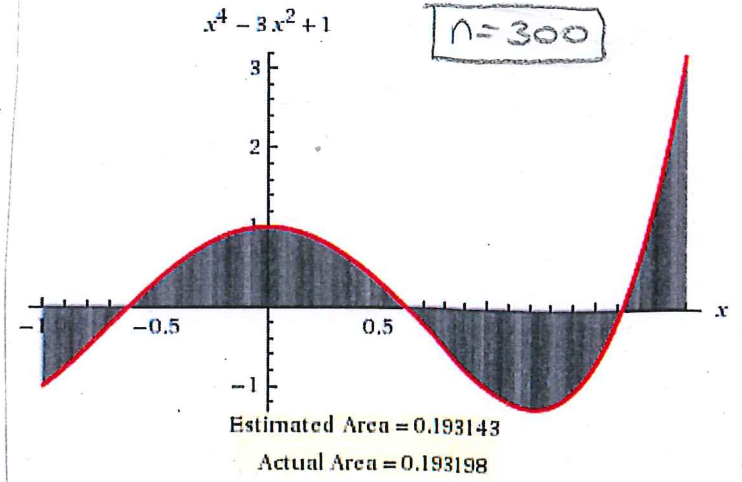










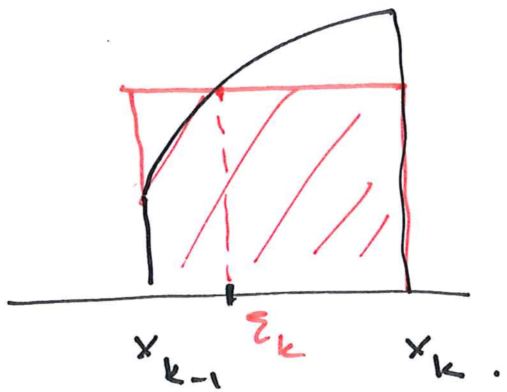


Generated using Wolfram Math World
Riemann Sum

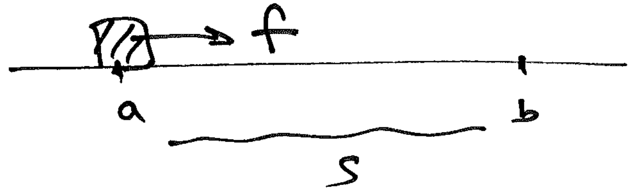
Man wird dem die "Riemannsche Summe"

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \sim A$$ als Näherung für die

Gesuchte Flächeninhalt ansehen.



(II) · Wirkt eine konstante Kraft f längs eines Weges der Länge s und zwar der x-Achse vom Punkt a bis zum Punkt $b := a + s$, so versteht man unter der von der konstanten Kraft f geleisteten Arbeit A, das Produkt $A = f \cdot s = f(b-a)$



Ist f örtlich variable, d.h. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion des Ortes $x \in [a,b]$, so wird man folgendermassen vorgehen.

Zerlege das Intervall $[a, b]$ in kleinen Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Wähle in jedem Intervall I_k, einen punkt $\xi_k \in I_k$ aus

Dann wird die "Riemannsche Summe"

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als näherung für die Gesuchte Arbeit A.

(III). Gegeben sei eine Stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

<u>Gesucht</u> ist eine "Stammfunktion" F (primitive).

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Defn. 6.1.1. Eine $F \subset C^1([a,b])$ heisst **Stammfunktion zu f** falls gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Bsp. $f(x) = x^2+5$. Dann ist z.B.

$F(x) = \frac{x^3}{3} + 5x$ $\qquad F'(x) = \frac{3x^2}{3} + 5 = x^2+5 = f$

eine Stammfunktion.

$G(x) = \frac{x^3}{3} + 5x + 3$ $\qquad \Rightarrow G'(x) = x^2+5 = f$

$\Rightarrow G$ ist auch ein Stammfunktion zu f.

$H(x) = \frac{x^3}{3} + 5x + 7$ $\qquad \Rightarrow H'(x) = f \Rightarrow H$ ist auch ein Stammfunktion.

Satz 6.1.1. Sind $F, G \in C^1[a,b]$ Stammfunktion ~~B~~ zu f, so gilt $F - G = \text{konstant}$.

Beweis. Sei $H = F - G$, F ein Stammfunk zu f $\Leftrightarrow F' = f$
G ein Stammfunk zu f $\Leftrightarrow G' = f$.

$H' = F' - G' = f - f = 0. \Rightarrow H$ ist konstant, ☒.

Bsp. (1) Sei $f = \sin x$.
$F(x) = -\cos x + K$ ist ein Stammfunktion ~~B~~ zu f.

(2) Was ist die Stammfunk $F(x)$ von $\sin x$ die $F(0) = 5$ erfüllt?

$F(x) = -\cos x + K$, $F(0) = 5 = -\cos 0 + K = -1 + K$
$\Rightarrow K = 6$.

$F(x) = -\cos x + 6$.

Die Folgende system

$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \sin x \\ F(0) &= 5 \end{aligned}\right\}$$ heisst ein Anfangswertproblem.

§6.2. Das Riemannsche Integral.

Siehe D. Solomon - Das Riemannsche Integral.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

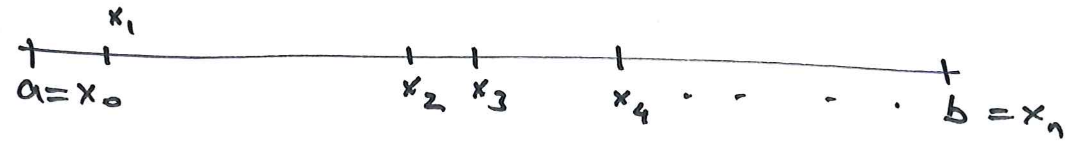
Defn. - 1) Eine Partition (Zerlegung, Einteilung ..) eines Intervals $I = [a, b]$ ist eine endliche Menge

$P = \{ a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b \}$ $\quad x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Sei $\mathcal{P}(I) := \{ P \subset I \mid a, b \in P,\ P \text{ ist endlich} \}$.

die Menge aller Partionen.

(P)



2) Die Feinheit der Zerlegung ist definiert durch

$$\delta(P) := \max_{1\le i\le n} \{ |x_i - x_{i-1}| \}.$$

d.h. $\delta(P)$ ist die Länge des grössten Teilintervalls

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \qquad 1 \le i \le n.$$

3) Sei $\xi_i \in I_i$ Zwischenpunkten (Stützstellen)

$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$

Jede Summe der Form

$$S(f, P, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$ nennt man

eine Riemannsche Summe der Zerlegung P und $\xi = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$.